様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　２年　５月２９日現在

機関番号：２２６０４
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2019
課題番号：１５Ｋ０４８５０

研究課題名（和文）非コンパクトなシンプレクティック多様体における安定曲線モジュライの倉西構造の構成

研究課題名（英文）Kuranishi structures on moduli spaces of stable maps in non-compact symplectic manifolds

研究代表者
赤穂　まなぶ（Akaho, Manabu）

首都大学東京・理学研究科・准教授

研究者番号：３０３３２９３５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：主にconcave型の無限遠を持つ非コンパクトなシンプレクティック多様体における安定曲線のモジュライ空間の倉西構造について調べた。特に互いに関連する次の3つのトピックについて成果を得た：(1) 接触多様体のシンプレクティック化における擬正則曲線の発散列を考察することによりモジュライ空間の角の適切な記述を得た。(2) 擬正則曲線のバブル現象の詳しい解析により安定曲線の収束列の極限についての記述を得た。(3) concave型の無限遠を持つ非コンパクトなシンプレクティック多様体内のLagrange部分多様体のFloer理論のトイモデルとして境界付き多様体のMorseホモロジーに積の構造を定義した。

研究成果の学術的意義や社会的意義
擬正則曲線はシンプレクティック多様体上のHamilton力学系やLagrange部分多様体の交叉などの様々な分野の研究に応用されている。従来の擬正則曲線の理論では閉シンプレクティク多様体や閉Lagrange部分多様体などの滑らかなものしか扱えなかったがLagrangeはめ込みや特異Lagrangeトーラス束など、応用上しばしば特異点を持つものが現れ、その際如何に擬正則曲線を用いるかが一つの問題となっている。本研究課題では特異点の補集合を想定して非コンパクトなシンプレクティック多様体における擬正則曲線の理論を研究している。これにより特異点が現れる場合に擬正則曲線の理論を適応することが可能となる。

研究成果の概要（英文）：This research studies the moduli spaces of stable maps in non-compact symplectic manifolds with concave end; the aim is to construct their Kuranishi structures. In particular, we focus on the following three related topics: (1) We observe sequences of pseudoholomorphic curves in the symplectizations of contact manifolds to describe the corners of Kuranishi structures of the moduli spaces of stable maps. (2) We study the details of bubbling off phenomena to understand the convergences of stable maps. (3) We may think some kind of Morse homology of manifolds with boundary as a toy model of Floer homology of Lagrangian submanifolds in non-compact symplectic manifolds with concave end. Towards A infinity algebras for some Lagrangian submanifolds in non-compact symplectic manifolds with concave end, we construct products on Morse homology of manifolds with boundary.

研究分野：シンプレクティック幾何学

キーワード：シンプレクティック幾何学　フレアー理論

1．研究開始当初の背景

(1) 擬正則曲線を用いたシンプレクティック幾何の大域的な研究は 80 年代に Gromov([5]) によってはじめられ、シンプレクティック多様体上の Hamilton 力学系の研究や Lagrange 部分多様体の交叉理論の研究などの様々な分野に応用された。このとき重要となるのは擬正則曲線のモジュライ空間の構成である。これに関して 90 年代半ばに Fukaya–Ono([4]) は安定曲線のモジュライ空間を構成し倉西構造とよばれる概念を導入した。

(2) これまで本研究代表者が行ってきた研究に Lagrange はめ込みの Floer 理論が挙げられる ([1][2])。従来の Floer 理論で扱っていたのは Lagrange 部分多様体であったが、[1][2] の Lagrange はめ込みの Floer 理論は最も簡単な特異点を持つ場合への拡張と見なせる。この他に特異点を持つものが現れる例としては Lagrange トーラス束の特異ファイバーなどが挙げられるが、Floer 理論でそのような複雑な特異点が現れる状況を扱うことはまだ様々な問題があった。

(3) 特異点を持つシンプレクティック多様体や Lagrange 部分多様体が現れる状況で Floer 理論を展開する最初の段階として、特異点の補集合における擬正則曲線のモジュライ空間を調べる必要がある。ただし特異点の補集合は非コンパクトであり、そのような場合に擬正則曲線を扱うことは非常に難しい。90 年代の終わりに Eliashberg–Givental–Hofer([3]) は接触幾何とシンプレクティック幾何を結ぶ擬正則曲線の理論としてシンプレクティック場の理論を提唱した。そこでは concave な無限遠を持つ非コンパクトなシンプレクティック多様体が扱われていた。

参考文献

[1] M. Akaho, Intersection theory for Lagrangian immersions, Math. Res. Lett. 12 (2005), no. 4, 543–550.

[2] M. Akaho and D. Joyce, Immersed Lagrangian Floer theory, J. Differential Geom. 86 (2010), No. 3, 381–500.

[3] Y. Eliashberg, A. Givental and H. Hofer, Introduction to symplectic field theory, GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999), Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part II, 560–673.

[4] K. Fukaya and K. Ono, Arnold conjecture and Gromov–Witten invariant, Topology 38 (1999), no. 5, 933–1048.

[5] M. Gromov, Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds, Invent. math. 82 (1985), no. 2, 307–347.

2．研究の目的

(1) 本研究の第一の目的は Riemann 面から非コンパクトなシンプレクティック多様体への安定曲線のモジュライ空間の倉西構造を構成することである。特に非コンパクトなシンプレクティック多様体として concave 型の無限遠を持つものを考える。また、そのシンプレクティック多様体内の Lagrange 部分多様体で concave 型の無限遠において Legendre 部分多様体に収束するものを考える。本研究で扱う安定曲線とは種数 0 の境界付き Riemann 面から convace 型の無限遠を持つ非コンパクトなシンプレクティック多様体への擬正則写像であって、その境界値が上述のタイプの Lagrange 部分多様体に含まれるものを考える。そしてそのような安定曲線のモジュライ空間に倉西構造を構成することが目的である。

(2) Fukaya at al.([7]) は閉シンプレクティック多様体内の閉 Lagrange 部分多様体に境界値を持つ種数 0 の境界付き Riemann 面からの安定曲線のモジュライ空間に倉西構造を構成

し、そのモジュライ空間の境界の組み合わせ的な情報から A 無限大代数を構成した。また本研究代表者は (1) で述べた concave 型の無限遠を持つ非コンパクトなシンプレクティック多様体内の Lagrange 部分多様体の Floer ホモロジーが境界付き多様体の Morse ホモロジーに対応していることを明らかにした ([6])。これらをふまえ本研究の第二の目的は (1) で構成した安定曲線のモジュライ空間の境界の組み合わせ的な情報から [7] の A 無限大代数を拡張したような代数を構成することである。

参考文献

[6] M. Akaho, Morse homology and manifolds with boundary, Commun. Contemp. Math. 9 (2007), no. 3, 543–550.

[7] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian intersection Floer theroy: anomaly and obstruction Part I, II, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 46.1, 46.2 (2009).

3. 研究の方法

(1) はじめに行う作業は [4][7] で述べられている閉シンプレクティック多様体における安定曲線のモジュライ空間の位相（Hausdorff 性、コンパクト性）の確認である。concave 型の無限遠を持つ場合の非コンパクトなシンプレクティック多様体における擬正則写像のモジュライ空間のコンパクト性に関しては [8][9] の先行研究がある。しかしそこで議論されている内容は主に擬正則曲線の Gromov–Hofer 収束に関するものであり、安定曲線のモジュライ空間の位相については不明な点が多い。したがってまずはこの場合の安定曲線のモジュライ空間の位相を調べることからはじめる。

(2) [7] では閉シンンプレクティック多様体内の閉 Lagrange 部分多様体に境界値を持つ種数 0 の安定曲線のモジュライ空間の倉西構造を構成している。本研究ではこの構成を大いに参考にして concave 型の無限遠を持つシンプレクティック多様体内の Lagrange 部分多様体に境界値を持つ種数 0 の安定曲線のモジュライ空間の倉西構造を構成する。そしてそのモジュライ空間の境界の構造を調べる手がかりとして、[6] で導入された境界付き多様体の Morse ホモロジーにおける勾配 tree のモジュライ空間とそこから得られる積の構造を詳しく調べる。

参考文献

[8] C. Abbas, An introduction to compactness results in symplectic field theory, Springer, Heidelber (2014), Viii+252.

[9] F. Bourgeois, Y. Eliashberg, H. Hofer, K. Wysocki and E. Zehnder, Commpactness results in symplectic field theory, Geom. Topol. 7 (2003), 799–888.

4. 研究成果

(1) 最初にいくつか定義を確認する。nordal な特異点を許す点付き Riemann 面からシンプレクティック多様体への擬正則曲線で自己同型群の位数が有限なものを安定曲線という。また安定曲線の自己同型群の作用による同値類全体を安定曲線のモジュライ空間という。本研究ではまずはじめに Bourgeois et al.([9]) による接触多様体のシンプレクティック化における安定曲線のモジュライ空間のコンパクト化について調べた。モジュライ空間のコンパクト化では安定曲線の列の極限にどのような安定曲線が現れるのかを調べることが重要となる。接触多様体のシンプレクティック化における特徴は holomorphic building という閉シンプレクティック多様体への安定曲線のコンパクト化にはなかった現象が起こること

である。Bourgeois et al.([9]) はこのコンパクト化を正当化するために安定曲線の定義域のRiemann 面は連結である必要はなく、しかも Reeb 軌道に関する自明なシリンダーを連結成分に持つことを許した。これに対し本研究では、以下の理由から Bourgeois at al.([9]) による安定曲線の定義を修正した。問題点を明らかにするために次のような単純な状況を考える。V を接触多様体、$\mathbb{R}$ を実数直線、$\mathbb{R}\times V$ をシンプレクティック化とする。また a,b を複素平面 $\mathbb{C}$ の異なる 2 点とし、$u_{i,j}:\mathbb{C}\to\mathbb{R}\times V$ をエネルギー有界で proper な擬正則曲線の列で、その仮想次元（モジュライ空間の次元）を 2 とする。さらに添字 i が無限大に発散するときに $\mathbb{R}\times V$ の点 $u_{i,j}(a)$ の $\mathbb{R}$ 成分は $-\infty$ に発散するとし、同様に添字 j が無限大に発散するときに $\mathbb{R}\times V$ の点 $u_{i,j}(b)$ の $\mathbb{R}$ 成分は $-\infty$ に発散するとする。このとき $t\to\infty$ かつ j は有界となる $u_{i,j}$ の列の極限では 2 階建ての holomorphic building が現れ、これはモジュライ空間の境界の点を表す。そしてさらにこの 2 階成分の $j\to\infty$ の極限を考えると、新たな 2 階建ての holomorphic building が現れ、最終的に先の 1 階成分 u_a と後の 2 階成分の u と 1 階成分の u_b と合計 3 つの擬正則曲線の組 (u,u_a,u_b) が現れ、これはモジュライ空間の角の点に対応し、仮想次元は 0 となる。一方、i と j を同時に ∞ に発散させると、その極限に 2 階建ての holomorphic building が現れ、その 2 階成分は u で、1 階成分は u_a と u_b の $\mathbb{R}$ 成分が適当にずれた連結成分が二つの擬正則曲線 $u_a\cup u_b$ が現れる。この組 $(u,u_a\cup u_b)$ は組 (u,u_a,u_b) と同じモジュライ空間の角の点に対応するべきであるが、組 $(u,u_a\cup u_b)$ の仮想次元は $u_a\cup u_b$ の連結成分の $\mathbb{R}$ 成分のずらしがあるため 1 となる。このようにモジュライ空間の角の構造を考慮すると Bourgeois at al. による安定写像の定義は何らかの修正が求められる。現時点での修正案は以下の通りである。擬正則写像の定義域が連結で、Reeb 軌道に関する自明なシリンダーでないのもに holomoprhic building の階に対応するデータを付け加えたものを成分とする組の集合をモジュライ空間とすればよいと考えられる。ここでのポイントは各安定曲線の連結成分が一つであるためモジュライ空間の次元が小さくなり角の構造と非常に相性が良い点である。

※ これは完全に後日談だが、Ishikawa([10]) は穴空き Riemann 面から concave 型の無限遠を持つ非コンパクトなシンプレクティック多様体への安定曲線のモジュライ空間の倉西構造を構成した。[10] にはここで目指していたモジュライ空間の位相についての考察もされている。Ishikawa の構成に対しては賞賛しかなく、今後は Ishikawa の構成と本研究で得られた結果との比較を行い安定曲線のモジュライ空間のより深い理解へとつなげたい。

(2) 安定曲線のモジュライ空間のコンパクト性を観察する課程で擬正則曲線のバブル現象の起こるメカニズムを詳しく解析した。閉シンプレクティック多様体の場合には Fukaya–Ono([4]) により安定写像のモジュライ空間のコンパクト性の様子が詳しく調べられている。[4] では擬正則曲線の列があるときに、はじめに定義域の Riemann 面に余分な点を付け加えて安定写像として収束させ、次に付け加えた点を取り除き、結果出現した不安定な既約成分を潰すことにより擬正則曲線の安定写像としての極限を構成するというトリックを用いている。このトリックは Bourgeois et al.([9]) の concave 型の無限遠を持つ非コンパクトなシンプレクティック多様体の場合にも用いられている。一方、McDuff–Salamon([10]) はバブル現象の詳しい解析を行うことにより定値写像に収束する擬正則曲線の既約成分には結節点が三つ以上現れることを示している。したがってこれを用いれば [4] で行った余分な点を付け加えて安定写像として収束させてから加えた点を取り除き、その際に現れた不安定な既約成分を潰すというトリックが不要になると思われる。現在これについたはまだ考察中であるが、concave 型の無限遠を持つ非コンパクトなシンプレクティック多様体の場合の安定曲線における Reeb 軌道に関する自明なシリンダーの扱いに対しての理解が深まる

のではないかと期待している。

(3) concave 型の無限遠を持つ非コンパクトなシンプレクティック多様体内の非コンパクトな Lagrange 部分多様体で concave 型の無限遠において Legendre 部分多様体に収束するものを考える。そして種数 0 の境界付き Riemann 面からこのシンプレクティック多様体への擬正則写像で境界値がこの Lagrange 部分多様体に含まれるものを考える。一方、[6] ではこの擬正則曲線から得られる Floer ホモロジーが境界付き多様体の Morse ホモロジーに対応していることを示した。そこで種数 0 の安定曲線のモジュライ空間を調べるための手がかりとして、まず境界付き多様体上の複数の Morse 関数達から得られる勾配 tree のモジュライ空間を調べた。Fukaya–Ono([4]) による安定曲線のモジュライ空間の倉西構造の構成のポイントは、擬正則曲線の貼り合わせの技法を用いてモジュライ空間の次元の低い strata から次元の高い strata へと倉西構造の意味での座標近傍を構成した点にあるが、これを参考に勾配 tree のモジュライ空間の位相を定義した。ここではごく簡単にそれを解説する。境界付き多様体上に勾配ベクトル場が境界に沿うような Riemann 計量と Morse 関数を与える。するとこの場合、多様体の内部だけでなく境界上にも臨界点が現れるが、特に境界上の臨界点には負の勾配ベクトル場が流れ込むもの（+ 型）と湧き出るもの（− 型）の二つのタイプが現れる。そしてこのような設定のもとで臨界点を結ぶ負の勾配ベクトル場の積分曲線のモジュライ空間を考えると、閉多様体の場合とは異なる以下のような現象が起こりうる。Morse 指数の差が 2 の内部の臨界点 p, q を結ぶ積分曲線の列で境界に向けて発散するものがあるとすると、その極限に p と + 型の臨界点 γ を結ぶ積分曲線と、γ と − 型の臨界点 δ を結ぶ境界上の積分曲線と、δ と q を結ぶ積分曲線の 3 本の積分曲線に収束するようなものが出現する。一方、$\mathbb{R}$ を実数直線とし、$\mathbb{R}$ 上の 3 点 x, y, z（$x < y < z$）の配置空間を考える。そして $z - y$ の逆数を s、$y - x$ の逆数を t をしたとき配置空間のコンパクト化は $C = \{(s,t) \mid s \geq 0, t \geq 0\}$ となる。このとき 3 点 x, y, z（$x < y < z$）を乗せた $\mathbb{R}$ から境界付き多様体上の Morse 関数の Morse 指数の差が 2 の内部の臨界点 p, q を結ぶ負の勾配ベクトル場の積分曲線の列があったとき、もし y の像が境界に向かって発散するとき、その極限に現れる 3 本の積分曲線の定義域は C における $(s,t) = (0,0)$ の点に対応する。この $(s,t) = (0,0)$ は C の余次元が 2（つまり角）の点であるが、一方、Morse 指数の差が 2 の内部の臨界点を結ぶ積分曲線の極限としてはモジュライ空間の余次元 1（つまり境界）の点として捕らえたい。そこで R 上の 3 点 x, y, z（$x < y < z$）の配置空間のコンパクト化として C 全体を考えるのではなく C の部分集合 $C' = \{(s,t) \mid s \geq 0, t \geq 0, s = t\}$ に制限すれば良いということが分かる。境界付き多様体上の Morse ホモロジーにおいて積を定義するときは Y 字グラフ上の点の 3 点の配置空間のコンパクト化を行う必要があるが、同様に配置空間のコンパクト化全体を考えるのではなく、その適当な部分集合に制限することにより勾配 tree グラフのモジュライ空間のコンパクト化を正しく記述することができることが分かった。

参考図書

[10] S. Ishikawa, Construction of general symplectic field theory, arXiv:1807.09455.

[11] D. McDuff and D. Salamon, J-holomoprhic curves ans symplectic topology, Second edition, American Mathematical Society Colloquium Publications, 52. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012. xiv+726 pp.

以上が本研究課題の最終報告である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計0件

〔学会発表〕　計8件（うち招待講演　8件／うち国際学会　4件）

１．発表者名 赤穂まなぶ
２．発表標題 Simplified proof of Gromov's theorem
３．学会等名 NCTS Symplectic Expedition: Floer theory and beyond, Kenting Young Activity Center（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2018年

１．発表者名 赤穂まなぶ
２．発表標題 J-holomorphic curves in symplectic topology
３．学会等名 第13回代数・解析・幾何学セミナー（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 Manabu Akaho
２．発表標題 Symplectic displacement energy for exact Lagrangian immersions
３．学会等名 Workshop on Symplectic Geometry and Physics（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2016年

１．発表者名 Manabu Akaho
２．発表標題 Symplectic displacement energy for exact Lagrangian immersions
３．学会等名 International Conference for the 70th Anniversary of Korean Mathematical Society 2016 KMS Annual Meeting（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2016年

１．発表者名
赤穂まなぶ

２．発表標題
Symplectic displacement energy for exact Lagrangian immersions

３．学会等名
トポロジー火曜セミナー（招待講演）

４．発表年
2015年

１．発表者名
赤穂まなぶ

２．発表標題
Introduction to immersed Lagrangian Floer theory I, II

３．学会等名
geometry seminar（招待講演）

４．発表年
2015年

１．発表者名
赤穂まなぶ

２．発表標題
Symplectic displacement energy for exact Lagrangian immersions

３．学会等名
Mirror Symmetry and Algebraic Geometry 2015（招待講演）（国際学会）

４．発表年
2015年

１．発表者名
赤穂まなぶ

２．発表標題
Introduction to bounding cochains of filtered A-infinity algebras

３．学会等名
微分トポロジー16（招待講演）

４．発表年
2016年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

East Asian Symplectic Conference 2015 in HONG KONG
http://www.comp.tmu.ac.jp/pseudoholomorphic/EASC2015.html

East Asian Symplectic Conference 2019 in PENGHU
http://math.ncku.edu.tw/~river/easc2019/

６．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考