様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号： ３２６２１
研究種目： 基盤研究(C)（一般）
研究期間： 2015～2017
課題番号： １５Ｋ０４８５３

研究課題名（和文）コンパクト・ケーラー多様体の極値的測度の研究

研究課題名（英文）Extremal measures on compact Kahler manifolds

研究代表者
辻　元（TSUJI, HAJIME）

上智大学・理工学部・教授

研究者番号：３０１７２０００

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：ケーラー・リッチ流の極限について、射影代数的かつ標準束がアバンダントな場合に、その極限が、所謂、標準測度の曲率カレントとなることを証明しました。また、代数的ファイバー空間のケーラー・アインシュタイン体積形式の間に自然な不等式：全空間のケーラー・アインシュタイン体積形式　≧　相対ケーラー・アインシュタイン体積形式　×　底空間のケーラー・アインシュタイン体積形式　が成り立つことを示した。これは相対標準束の半正値性の非常に精密な表現になっている。また証明の過程で代数的ファイバー空間のベルグマン核についても同様の不等式が成り立つことを示した。

研究成果の概要（英文）：We prove that tha Kaehler-Ricci flow on a projective manifold with abundaant canonical bundle has a long time current solution and the limit is tha curvature current of the canonical measure. Also we prove an inequality for Kaehler-Einstein volume forms on algebraic fiber spaces. Namely we prove that the K-E volume form on the total space is bigger than or equal to the product of the relative K-E volume form and pullback of the K-E volume form on the base space.
We have also proven the simliar inequalty for the Bergman volume forms (for the adjoint line bundles) on the algebraic fiber sace.

研究分野： 複素多様体論

キーワード： ケーラー・リッチ流　ケーラー・アインシュタイン計量　多重劣調和関数　特異エルミート計量　正閉カレント　ケーラー多様体　随伴直線束　射影代数多様体

１　研究開始当初の背景

研究開始当初は射影代数多様体の射影族については多重種数の変形不変性については研究代表者を含む何人かによって証明されていたため、コンパクト・ケーラー多様体のケーラー族について多重種数の変形不変性を証明することが重要な研究目標になっていた。

一方、研究代表者はケーラー・リッチ流の研究を 1980 年代末に創始して、ケーラー・リッチ流と極小モデル予想の間の関係に、それ以来関心を持ってきた。一方、2005 年に Berndtsson らによってベルグマン核の変動について、その多重劣調和性が示された（米谷、山口らの先行研究があった）。即ち擬凸領域の擬凸変形について、そのベルグマン核は相対標準束の上の半正曲率を持つエルミート計量を与える。

このベルグマン核の研究に刺激されて、研究代表者はケーラー・リッチ流の離散化に取り組んで 2008 年にそのベルグマン核の力学系を用いた離散化を確立した。これによりベルグマン核の力学系を使って射影代数多様体の上のケーラー・リッチ流の研究が可能になった。

　これをコンパクト・ケーラー多様体の上に拡張しようとするとコンパクト・ケーラー多様体の上には正則直線束が十分存在しないためにベルグマン核自体が定義できない。実際、一般のコンパクト複素トーラス上には自明でない直線束は存在しない。そこで、ベルグマン核の力学系の代わりに極値的測度の力学系を使うことを考案した。なぜなら極値的測度を定義するには正閉(1,1)カレントが存在すれば十分だからである。即ちコンパクトケーラー多様体の上には極値的測度の力学系が常に定義できるのである。

２．研究の目的

研究の目的はベルグマン核の力学系を極値的測度の力学系に置き換えて理論を構築し、それにより多重種数の変形不変性をコンパクト・ケーラー多様体のケーラー族について証明することである。即ち次の予想が目標である。

予想：コンパクト・ケーラー多様体のケーラー族に対してファイバーの多重種数は不変である。

またコンパクト・ケーラー多様体のケーラー・リッチ流についてその挙動について研究することである。コンパクト・ケーラー多様体の極小モデル理論については、ほとんど何も分かっていないが、それはコンパクト・ケーラー多様体の上については

（１）標準束がネフでない場合に有理曲線の存在を証明する方法が現在までのところ発見されていない。

（２）コンパクト・ケーラー多様体の上の曲線の錘は一般によく分からない。また直線束が十分に存在しないために収縮定理(Contraction theorem)が証明されていない。

従って、コンパクト・ケーラー多様体において極小モデル理論を構築するには何らかの形で収縮定理にあたるものを構成しなくてはならない。これは一見、多重種数の変形不変性と関係ないように見えるかもしれないが、実はそうではない。というのは多重種数の変形不変性を証明するには、一般的に極小特異性を持つ特異エルミート計量で曲率半正定値のものを作る必要があるからである。いわば、特異エルミート計量として「極小モデル」を構成するということが重要になるのである。

そこで研究開始当初の目論見はこうした極小特異性を持つ特異エルミート計量を構成する方法としてケーラー・リッチ流やベルグマンン核の力学系、極値的測度の力学系が候補になっていた。

３．研究の方法

数学の研究なので、内外の共同研究者および関連する研究者との研究連絡を行った。特に多変数関数論葉山シンポジウムや多変数関数論冬セミナーの他に、共同研究者を日本に招いて、あるいはパリ第６大学などにこちらから出向いて共同研究を行った。

４．研究成果

コンパクト・ケーラー多様体上のケーラー・リッチ流は任意のケーラー形式を初期値として構成できる。しかし、一般には時間大域的な解は一般には存在しない。時間大域的な解の存在と標準束がネフであることは同値である。従って極小でない（標準束がネフでない）コンパクト・ケーラー多様体上のケーラー・リッチ流は滑らかな時間大域的な解を持たない。そこで、解の要件を空でないザリスキ開集合上で滑らかなケーラー形式で且つ全空間で正閉(1,1)カレントであり、更に極小特異性を持つものとする。このとき正規化しないケーラー・リッチ流を考えると、そのド・ラームコホモロジー類は初期値のケーラー形式を始点とする傾きを標準束の第一チャーン類とする半直線の上を動くことが分かる。このような解の存在は、J.Song と G.Tian により特殊な場合に知られていたが、

本研究により標準束が擬正のコンパクト・ケーラー多様体の上で常にカレントの意味での時間大域解が存在することが示された。

この解の存在はそれ自身、興味深いことではあるが、このままでは大したことは導くことができない。そこで、ケーラー・リッチ流を離散化することを考える。射影的な場合は、これはベルグマン核の力学系により離散化できる。

X を射影代数多様体とする。十分アンプルな直線束 A をとり、A の上のエルミート計量 h_{A} を定めて、A の随伴直線束のベルグマン核を K_{1} とする。次に K_{1} の逆数を随伴ン直線束 $K_{X}+A$ の特異エルミート計量として $2K_{X}+A$ のベルグマン核 K_{2} を構成する。以下同じことを帰納的に繰り返すと、ベルグマン核の列 $\{ K_{1},K_{2},\cdots ,K_{m}\cdots\}$ を得ることができる。この列の存在は標準束が擬正であることから示される。

この列は研究代表者が 2008 年に発表した論文: H. TSUjI, Dynamical construction of K¥”ahler=Einstein metrics, Nagoya Math. J. 2008. で示されている。さて、これをケーラー・リッチ流の離散化と考えるにはどうするのか解説しよう， K_{m} の定める標準束の特異エルミート計量の曲率カレントを T_{m} で表すことにしよう。このとき構成法から T_{m} は極小特異性を持つ正閉(1,1)カレントである。その意味で列 $\{ K_{1},K_{2},\cdots ,K_{m}\cdots\}$ はケーラー・リッチ流に似ているのであるが、このままではケーラー・リッチ流を再現できない。

そこで次のように考える、k を正整数として、kA を考えその計量として h_{A}^{k} を考えて同様に $\{ K_{k,1},K_{k,2},\cdots ,K_{k,m}\cdots\}$ を構成する。このとき次の定理が成り立つ。

定理１　$K_{k,m}$ の定める $kA + mK_{X}$ の特異エルミート計量の曲率カレントを $T_{k,m}$ とする。このとき列 $\{ k^{-1}T_{k,m}\}_{m\geqq 1}$ を考える。このときパラメータ k を無限大にしたときの極限は（特異）ケーラー・リッチ流を再現する。

このようにベルグマン核の力学系によりケーラー・リッチ流が再現できるが、これだけではベルグマン核による離散化とケーラー・リッチ流の関係がついたに過ぎない。これではあまり進展がないように見えるが、そうではない。それを述べる前に、アバンダントという概念を導入する。コンパクト・ケーラー多様体の標準束が**アバンダント(abundant)**であるとは、その数値的小平次元と小平次元が等しいことである。この概念を使うと次の定理が得られる。

定理２　X を非特異射影代数多様体とし、標準束は擬正かつアバンダントであるとする。このとき任意のアンプル直線束の曲率形式として定まるケーラー形式を初期値とするケーラー・リッチ流の時間大域的なカレント解は、正規化すると標準測度の曲率形式にカレントの意味で収束する。

ここで**標準測度(canonical measure)**とは何か説明しなければならない。これは小平次元が０以上のコンパクト・ケーラー多様体 X に対してその飯高ファイブレーション $f : X \to Y$ をとる。このとき Y 上の捻じれ付きケーラーアインシュタイン体積形式の引き戻しと、相対標準束の自然な L^2 内積から決まる相対標準形式のテンソル積を標準測度と呼ぶ。
標準測度は、小平次元が０以上のコンパクト・ケーラー多様体の上のケーラー・アインシュタイン体積形式の代替物である。

このようにアバンダントという条件下ではあるが、ケーラー・リッチ流の特異性を持つカレント解の極限が決定されたことは、恐らく初めてのことではないかと思う。

ところで、このようにケーラー・リッチ流を離散化したことで、分かることがある。それは相対標準束の半正値性である。即ち次の定理が得られる。

定理３　$f : X \to S$ を射影代数多様体の射影族とし、一般ファイバーの標準束は擬正であるとする。このとき相対標準束 $K_{X/S}$ は自然な特異エルミート計量で半正値曲率カレントを持つ。

この定理自体は研究代表者が別の方法で 2011 年に証明しているが、これをケーラー・リッチ流を用いて別証明することができるのである。

この定理の証明の概略は次の通りである。
全空間 X の上のアンプル直線束 A をとり、その上の滑らかなエルミート計量 h_{A} で曲率形式がケーラー形式となるものをとる。各ファイバー上で（正規化しない）ケーラー・リッチ流を走らせる。これらの解をファイバー毎に並べたものは $tK_{X/S} + A$ の特異エルミート計量を定義する。そこでベルグマン核による離散化をとると、これらは底空間をパラメータとして多重劣調和に変動することが知られている。これは Berndtsson の結果を使えば分かる。従ってその正規化極限が求める半正曲率の計量を与える。

ところでこの議論はコンパクト・ケーラー多様体の場合には適用できないことに注意しよう。なぜなら一般のコンパクト・ケーラー多様体の上には自明でない直線束が存在し

せず、ベルグマン核の力学系は定義できないからである。

そこで、ベルグマン核の代替物が必要になるのであるが、それが極値的測度である。
X をコンパクトケーラー多様体、T を正閉(1,1)カレントとして

d¥mu(T) = sup ¥{ dV | -Ric(dV) + T ≧ 0}

と定義する。ここで上限は各点毎の上限で、ｄV は上半連続体積形式で総体積１のもので、その逆数が標準束の特異エルミート計量を定めるものを全て動く。この d¥mu(T)を T に付随する X の**極値的測度(extremal measure)**という。この構成法から-Ric(d¥mu(T)) + T は正閉(1,1)カレントとなる。この極値的測度を使って、やはり力学系を構成することができる。

X をコンパクト・ケーラー多様体としてTを正閉(1,1)カレントとして
T_{1}:= - Ric d¥mu(T) + T
とおき
T_{m} := -Ric(d¥mu(T_{m-1}) + T_{m-1}
とおくことで力学系 ： { T_{m}}が得られる。これは射影代数多様体の上では、本質的にベルグマン核の力学系と変わらない性質を持つことが研究代表者の研究により分かっている。しかしながら、コンパクト・ケーラー多様体の上で、ベルグマン核の力学系とどうようの性質をもつのかどうかについては、はっきりとしたことは分かっていない。これは今後の研究課題である。

ところで、一般型代数多様体の上には研究代表者の研究により標準的特異ケーラー・アインシュタインカレントが存在する。このカレントの性質として次の定理を得た。

定理４ f ：X → S を代数的ファイバー空間で X､S は共に一般型代数多様体とする。このとき（特異）X のケーラー・アインシュタイン体積形式 dV_{X}、S のケーラー・アインシュタイン体積形式 dV_{S}，相対ケーラー・アインシュタイン体積形式 dV_{X/S} の間に不等式

dV_{X} ≧ dV_{X/S}・f^{*}dV_{S}

が成り立つ。

この不等式は、射影代数多様体上のベルグマン核の力学系と、ベルグマン核の間の上と同様の不等式（この不等式も今まで知られていなかった新しい不等式である）を用いて示すことができる。この不等式は相対標準束の半正値性の非常に精密な形と考えることができる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）
①<u>H. TSUJI</u>, Some dynamical systじems of extremal measures, Springer Proc. On pure math 144 (2015) ,327-342.

〔学会発表〕（計６件）

①<u>H. TSUJI</u>: Plurisubhamonic variation of Kahler-Ricci flows 、 Workshop of L^2-extension theorem, 東京大学数理科学研究科, 2016,2.25.

② <u>H. TSUJI</u>: Pseudoconvexity and variation of Kahler-Einstein metrics 金沢市しいのき会館、2016 11.4

③ <u>H. TSUJI</u> :Some applications of the optimal L^2-extension theorem, University of Paris VI、Complex Geometry Seminar 2017 2.28

④<u>H. TSUJI</u>: Pointwise semipositivity of relative canonical bundles, 多変数関数論葉山シンポジウム 2017、7. 19、湘南国際村センター

⑤ <u>H. TSUJI</u>: Pseudoconvexity and variation of K¥"ahler-Einstein metrics, 複素幾何シンポジウム、石川県教育会館 2017 11. 15

⑥<u>H. TSUJI</u> ：On the pseudoeffectivity of relative canonical bundles for Kaehler-families, Mini Workshop on Complex Geomery, KIAS, Seoul Korea 2017. 12.5.

〔図書〕（計０件）
なし

〔産業財産権〕
なし

○出願状況（計０件）
なし

○取得状況（計０件）
なし

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
辻 元（TSUJI Hajime）

上智大学・理工学部・教授
研究者番号：30172000

(2)研究分担者：なし

(3)連携研究者　なし

(4)研究協力者　なし