

令和 2 年 7 月 7 日現在

機関番号：32682

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04857

研究課題名（和文）ウィッテン摂動を用いたディラック型作用素の指数理論とその応用

研究課題名（英文）Index theory for Dirac-type operators using Witten's deformation and its applications

研究代表者

吉田 尚彦 (Yoshida, Takahiko)

明治大学・理工学部・専任講師

研究者番号：70451903

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 2,000,000円

研究成果の概要（和文）：Kostant-Souriauによる幾何学的量子化の枠組みにおいて、得られた結果が偏極とよばれる付加構造の選び方に依存するかどうか問題になる。これについて、最近の研究でKähler偏極の1係数族をうまくとるとその極限として実偏極が現れることがいくつかの例で明らかになった。一方、シンプレクティック多様体上の可積分とは限らない概複素構造に対しても、Kähler偏極を用いた量子化を一般化したSpin-c量子化と呼ばれる方法がある。本研究では、底空間が完備なLagrangeファイバー束に対して、Spin-c量子化の断熱極限として実偏極を用いた幾何学的量子化が現れることを意味する結果を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

シンプレクティック多様体の量子化には様々な方法が知られており、それらの間の関係性を調べることは基本的な問題である。これについて、Kähler偏極と実偏極の関係は最近の研究によって明らかになりつつあるが、概複素構造が可積分でない場合（つまり、Spin-c量子化）については、Hilbert空間の次元の一致以外のことは分かっていなかった。本研究では、先行研究を一般化し、概複素構造が可積分でない場合にも、Spin-c量子化の断熱極限として実偏極を用いた幾何学的量子化が現れることを示した点に学術的意義がある。

研究成果の概要（英文）：In the geometric quantization by Kostant-Souriau, one temporarily needs a geometric structure, polarization, to construct the quantum Hilbert space. It is the fundamental problem whether the obtained result depends on the choice of polarizations. A recent research reveals, on some examples, there exists a one-parameter family of Kähler polarization which converges to the real polarization. Any symplectic manifold has many possibly non-integrable almost complex structures, and for them, one has a generalization of the Kähler quantization, called the Spin-c quantization. In this work, for a Lagrange fiber bundle on a complete base in the sense of affine geometry, one obtained an orthogonal family of sections of the prequantum line bundle indexed by Bohr-Sommerfeld points which satisfies, under the adiabatic limit: (i) the image of each section by the Spin-c Dirac operator converges to 0, (ii) each section converges to the delta-section supported on the corresponding Bohr-Sommerfeld fiber.

研究分野：シンプレクティック幾何学

キーワード：幾何学的量子化 Lagrangeファイバー束 Spin-c Dirac量子化 実量子化 断熱極限

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

Kostant-Souriau による幾何学的量子化の枠組みにおいて、シンプレクティック多様体から量子 Hilbert 空間を構成する為には偏極と呼ばれる付加構造が必要になる。その為、得られた結果が偏極の選び方に依存するかどうかの問題になる。偏極の典型的な例には、Kahler 多様体に付随する Kahler 偏極や、Lagrange ファイバー束（或いは完全可積分系）に付随する実偏極がある。これら 2 つの偏極を用いて構成される量子 Hilbert 空間について、非特異射影的トーリック多様体、複素旗多様体、Riemann 面上の平坦 $SU(2)$ 束のモジュライなどで両者の次元が一致することが case-by-case で示されている。

(1) Kahler 偏極を用いて構成される量子 Hilbert 空間の次元は Dolbeault 作用素（或いは Spin-c Dirac 作用素）の指数であり、実偏極を用いて構成される量子 Hilbert 空間の次元は Bohr-Sommerfeld ファイバーの個数である。先の一連の結果は、Spin-c Dirac 作用素の Bohr-Sommerfeld ファイバーへの局所化現象とみなすことができる。これについて、古田幹雄氏（東大数理）、藤田玄氏（日本女子大学）との共同研究において、Bohr-Sommerfeld でないファイバーの解析的な特徴付けを行い、この条件を抽象化した付加構造を定式化した。さらに、コンパクトな部分以外にこの付加構造がある閉多様体とは限らない Riemann 多様体上で Spin-c Dirac 作用素の指数理論を展開し、その応用として、ある種の特異ファイバーも許容する Lagrange ファイバー束については Spin-c Dirac 作用素の指数が特異、非特異両方の BS ファイバーの個数と一致することを示した。

(2) 一方、最近の研究で Kahler 偏極の 1 係数族をうまくとるとその極限として実偏極が現れることが非特異射影的トーリック多様体、複素旗多様体などいくつかの実例で明らかになった。

2. 研究の目的

(1) シンプレクティック多様体上には可積分とは限らない概複素構造が豊富にあり、そのような概複素構造に対して、Kahler 偏極を用いた量子化を一般化した Spin-c 量子化と呼ばれる量子化の方法がある。シンプレクティック多様体がコンパクトで、かつ実偏極のある状況では、Spin-c 量子化における量子 Hilbert 空間の次元である Spin-c Dirac 作用素の指数は、上述したように、Bohr-Sommerfeld ファイバーの個数と一致する。そこで、研究開始当初の背景 (2) の観点から、Spin-c 量子化と実偏極を用いた量子化との関係を研究することが目的である。

(2) 研究開始当初の背景 (1) で述べた指数理論において、Dirac 型作用素の指数は、Witten 摂動のアイデアに基づいて Dirac 型作用素を摂動し、その L^2 -指数として解析的に定義される。そのため、定義に基づいて指数を計算することは一般には困難であり、このことが局所指数の理論の応用を考える際にしばしば大きな障害になる。そこで、この指数理論を見直すことで指数を計算する手段を与え、幾何学的量子化などへ応用することが目的である。

3. 研究の方法

シンプレクティック多様体上で概複素構造の 1 係数族を考え、パラメータを変動させたときの付随する Spin-c 量子化の族の挙動と実偏極との関係を調べる。Riemann 幾何学においては、ファイバー束の全空間上の Riemann 計量に対して、ファイバー方向を小さくするような変形を考え、パラメータを変動させたときの付随する幾何学的対象の挙動を調べることがよく行われる。そこで、実偏極がある状況として、Lagrange ファイバー束の場合に全空

間上の Riemann 計量に対してこのような変形を考えれば, シンプレクティック構造と整合的な概複素構造の 1 係数族が得られる. この族に対して, Spin-c Dirac 作用素の核の元の挙動を調べ, 実偏極と関係を探る.

4. 研究成果

Lagrange ファイバー束の底空間がアフィン幾何学の意味で完備 (普遍被覆空間がユークリッド空間と同型) である場合, Lagrange ファイバー束はユークリッド空間上の標準的な Lagrange ファイバー束 ($\mathbb{R}^n \times \mathbb{T}^n$ から \mathbb{R}^n への射影) の基本群作用による商として得られる. 従って, この場合, 元の Lagrange ファイバー束上の幾何構造を底空間の普遍被覆空間へ持ち上げるにより, ユークリッド空間上の標準的な Lagrange ファイバー束上で基本群作用で不変な Spin-c 量子化を考察すればよいことになる. 標準的な Lagrange ファイバー束の全空間はユークリッド空間 \mathbb{R}^n とトーラス \mathbb{T}^n の直積であり, この上の概複素構造は Siegel 上半空間の元である行列を用いて具体的に書き下すことができる. そこで, Riemann 計量のファイバー方向を小さくする変形に対応する概複素構造の 1 係数族と Spin-c Dirac 作用素を具体的に書き下し, 核の元を考察することで以下の結果を得た.

Lagrange ファイバー束の全空間上の整合的な概複素構造で, ファイバーに沿って不変なものが任意に与えられたとき, 付随する Spin-c Dirac 作用素を D とする. Lagrange ファイバー束の底空間がアフィン幾何学の意味で完備なとき, Bohr-Sommerfeld 点で添え字付けられた前量子化束の切断の組 $\{s_b \mid b \text{ は Bohr-Sommerfeld 点}\}$ で次を満たすものを構成できた.

- i. s_b 達は互いに直交する.
- ii. 各 s_b について, Ds_b の L^2 ノルムは断熱極限 (ファイバー方向が潰れるようにパラメータを変動させる極限) をとると 0 に収束する.
- iii. 断熱極限をとると, 各 s_b は, 超関数の意味で, 対応する Bohr-Sommerfeld ファイバーに台を持つデルタ関数に収束する.

この結果は Spin-c 量子化の断熱極限として実偏極を用いた幾何学的量子化が現れることを意味している. また, 概複素構造が可積分である場合には, ある技術的な仮定の下で, s_b 達を正則切断の空間の基底になるようにとることが出来た.

Lagrange ファイバー束の全空間上の関数 f に対して前量子化束の切断の空間上に線型作用素 $Q(f)$ が定まるが, 概複素構造が可積分である場合に, $Q(f)$ が上述の族 $\{s_b\}$ を保つ為の必要十分条件と, その場合に作用素の $\{s_b\}$ に関する表現行列を求めることができた.

これらの結果は, 論文「Adiabatic limits, Theta functions and geometric quantization」にまとめている.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 吉田尚彦	4. 巻 2098
2. 論文標題 Adiabatic limits, theta functions, and geometric quantization (announcement)	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 吉田尚彦	4. 巻 71
2. 論文標題 RR-BS対応 -幾何学的量子化における指数の局所化現象	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 論説数学	6. 最初と最後の頁 1-30
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 吉田尚彦	4. 巻 2016
2. 論文標題 Equivariant local index and symplectic cut	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 京都大学数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 161--167
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 吉田尚彦	4. 巻 arXiv:1904.04076
2. 論文標題 Adiabatic limits, theta functions, and geometric quantization	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 e-print arXiv	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計16件（うち招待講演 13件 / うち国際学会 10件）

1. 発表者名 吉田尚彦
2. 発表標題 Adiabatic limits, theta functions, and geometric quantization
3. 学会等名 研究会 “変換群論における幾何・代数・組み合わせ論”（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 吉田尚彦
2. 発表標題 Adiabatic limits, theta functions, and geometric quantization
3. 学会等名 Symplectic Geometry Seminar, University of Toronto（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 吉田尚彦
2. 発表標題 Adiabatic limits, theta functions, and geometric quantization
3. 学会等名 Geometry and Topology Seminar, McMaster University（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 吉田尚彦
2. 発表標題 Theory of local index and its applications
3. 学会等名 Workshop on loop spaces, supersymmetry and index theory（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 吉田尚彦
2. 発表標題 Adiabatic limits, theta functions, and geometric quantization of Lagrangian fibrations
3. 学会等名 Toric Topology 2017 in Osaka (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 吉田尚彦
2. 発表標題 Adiabatic limits, theta functions, and geometric quantization
3. 学会等名 変換群論における幾何・代数・組み合わせ論 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 吉田尚彦
2. 発表標題 Equivariant local index and symplectic cut
3. 学会等名 新しい変換群論とその周辺 (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 吉田尚彦
2. 発表標題 Theory of local index and its applications
3. 学会等名 茨城大学水戸幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 吉田尚彦
2. 発表標題 Theory of local index and its applications
3. 学会等名 首都大学東京幾何学セミナー（招待講演）
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 吉田尚彦
2. 発表標題 Theory of local index and its applications
3. 学会等名 慶應義塾大学微分幾何学・トポロジーセミナー（招待講演）
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 吉田尚彦
2. 発表標題 Adiabatic limits, theta functions, and geometric quantization
3. 学会等名 2019 Canadian Mathematical Society Winter Meeting（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 吉田尚彦
2. 発表標題 Adiabatic limits, theta functions, and geometric quantization
3. 学会等名 Toric Topology 2019 in Okayama（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 吉田尚彦
2. 発表標題 Does the quantum Hilbert space depend on polarizations?
3. 学会等名 Workshop on Topics in the Geometry and Topology of moduli spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 吉田尚彦
2. 発表標題 An index theoretic approach to RR-BS
3. 学会等名 Workshop on Topics in the Geometry and Topology of moduli spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 吉田尚彦
2. 発表標題 Adiabatic limits, theta functions, and geometric quantization
3. 学会等名 日本数学会2020年度年会・幾何学分会 (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 吉田尚彦
2. 発表標題 Adiabatic limits, theta functions, and geometric quantization
3. 学会等名 第46回変換群論シンポジウム (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----