

平成 30 年 6 月 11 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04858

研究課題名(和文)幾何構造に付随した微分作用素に対する恒等式の幾何学への応用

研究課題名(英文) Study on identities for generalized gradients associated to geometric structures and their applications

研究代表者

本間 泰史 (HOMMA, Yasushi)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：50329108

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：ディラック作用素などの幾何学で現れる一階微分作用素の間にはいろいろな恒等式が成立する。本研究の目的は新しい恒等式の開発や幾何構造を課した場合への応用である。国際共同研究を実施し、次の研究成果を得た：

(1) 異なるベクトル束の間の微分作用素に対する「擦じれワイゼンベック公式」を具体的に書き下し、いくつかの応用を与えた。

(2) ラリタ-シュインガー場と様々な幾何構造との関係を解明した。平行スピンの3/2場をもつ多様体を分類した。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this project is to find new identities for generalized gradients related to geometric structures and apply them to geometry, harmonic analysis and theoretical physics. Here, a generalized gradient is a conformally covariant 1st differential operator on a spin manifold such as the Dirac operator and the Rarita-Schwinger operator. Doing an international joint research, we have the following results:

(1) We give the twisted Weitzenböck formula explicitly which is a unique relation for generalized gradients on two different vector bundles. We also give some applications such as a commutative relation for Lichnerowicz Laplacian and a generalized gradient.

(2) We clarify a relation between Rarita-Schwinger fields and some geometric structures. We also give a classification of spin manifolds admitting parallel 3/2-spin fields.

研究分野：数物系科学(幾何学)

キーワード：スピン幾何学 ラリタ-シュインガー作用素 ディラック作用素 ワイゼンベック公式 幾何構造 ラプラス作用素

1. 研究開始当初の背景

リーマンホロノミー群 G をもつリーマン多様体上の同伴ベクトル束の間には、リーマン計量と G 構造から一階微分作用素を定義することができる。それらは、generalized gradients と呼ばれ幾何学において基礎的な役割を果たす。例えば、

- (1) 外微分, 余微分, 共形キリング作用素.
- (2) ディラック作用素, ペンローズによるツイスター作用素, 重力子に関係したスラリタ-シュインガー作用素.
- (3) 上記の作用素を構造群 G に関して分解した 1 階微分作用素 (四元数ケーラー幾何学, 例外幾何学で活躍する).

である。これら作用素の間にはワイゼンベック公式とよばれる恒等式が成立する(参考文献)。それは同伴束 V 上のいくつかの gradient とその随伴作用素を合成した 2 階微分作用素たちを考えたとき「それらの適当な線形結合を取れば、微分の階数が 0 階へと落ち、曲率で書ける」という恒等式である。このワイゼンベック公式から様々な消滅定理や作用素の固有値評価を導くことができる。例えば、Semmelmann, Weingart または研究代表者が (独立に) 開発したワイゼンベック公式により、四元数ケーラー多様体のすべての消滅定理はツイスター空間を経由せずに証明することができ、現在も利用されている。その他にも、研究代表者によるワイゼンベック公式が正質量定理の一般化に利用されるなど、ワイゼンベック公式は微分幾何学において必要不可欠な道具となっている。また、gradients という 1 階微分作用素は対称空間 G/K 上で G 不変な微分作用素のため、調和解析やクリフォード解析などの分野でも重要な研究対象である。

さて、申請者は 2014 年頃に、異なる同伴ベクトル束の間での gradients の恒等式として、全く新しいタイプの「捩じれワイゼンベック公式」の開発に成功した。また、リヒネロビッツ-ラプラス作用素と gradients の可換公式を与えた。これは後に、Semmelmann, Weingart により一般化されている (参考文献)。この可換公式が本研究課題に重要な役割を果たすことになる。また、この捩じれワイゼンベック公式は、相対性理論で重要なキリングテンソル場の伝搬問題 (prolongation) や可積分条件とも関連が深いことがわかっている。

2. 研究の目的

上記のような学術的背景及び研究代表者のこれまでの研究成果にもとづき、本研究課題では、ワイゼンベック公式などの gradients に対する恒等式を幾何学・表現論的な視点から考察し、更なる恒等式を構築し、数学・物理学へ応用することを目的とした。具体的には次のよう。

- (1) 「捩じれワイゼンベック公式」に対する応用を考察し、論文を完成させる。

- (2) 上述の「捩じれワイゼンベック公式」は、リーマン・スピン多様体におけるものであるため、四元数ケーラー多様体など幾何構造をもつ場合へ拡張する。
- (3) それを用いて、四元数ケーラー幾何学の未解決問題への挑戦する (Salamon 予想や幾何学的 formality など)。
- (4) ツイスター作用素や共形キリング作用素に対して伝搬問題・可積分条件が知られているが、そのアイデアを他の gradients に対しても考察し、捩じれワイゼンベック公式を用いて一般的な理論を構築する。さらに、微分幾何学への応用を与える。
- (5) gradients からラプラス作用素以外の楕円型 2 階微分作用素が定義できる。例えば、ラリタ-シュインガー作用素の 2 乗である。対称空間上でのこれら作用素のスペクトル計算は球面の場合のみ知られている (T. Branson, 1997)。そこで、開発した恒等式を利用して、他の対称空間に対する計算法を確立する。
- (6) 適当なツイストをしたディラック作用素を分解すれば楕円型複体に近いものが得られる。この仕組みを理解し、微分幾何学への応用を調べる。

以上が研究当初の具体的な目的である。これら一般論をすべて達成することは困難であるため、第一段階としてラリタ-シュインガー作用素、キリングテンソル場の作用素などに限定して上記の目的を探る。その結果に基づきより一般的な場合を探る。

3. 研究の方法

「捩じれワイゼンベック公式」を構成するアイデアはディラック作用素をツイストし分解するという手法を用いた。詳しくは、研究成果で述べるが、この手法と PRV 予想の理論を適用すれば結果を得ることができる。また、幾何構造をもつ場合の「捩じれワイゼンベック公式」を得るには、理論的には同様の方法で出来るが、ディラック作用素をその幾何構造に沿って分解する必要があり、かなり複雑になる。どう回避するかを考察し、回避するアイデアを得た。

次に、リヒネロビッツ-ラプラス作用素と gradients の交換関係式を調べた。交換できない場合は 3 階微分作用素に対する恒等式となるため、曲率の微分項などが現れるが、適当な条件 (四元数ケーラー多様体など) のもとで消えるので、幾何学的に意味のある恒等式をできる限り構築し、微分幾何学へ応用すること考えた。ラリタ-シュインガー作用素や 4 次元多様体上の gradients に対して、結果を得ることができた。より高階の関係式については、高次カシミール元の関係式からの考察を行った。

さて、上の手法で得られた恒等式を幾何学・表現論へ実際にどう応用するかが本研究課題の主要なテーマであるが、それについて

は国内外の幾何学・物理学の研究者とコンタクトを取りながら進めていった。

スピン幾何学の専門家であるドイツの U. Semmelmann 氏のもとへ年 1, 2 回訪問した。また, Semmelmann 氏が研究代表者のもとへ課題期間中 3 回訪れた。このように, 互いに密接にコンタクトをとることにより本研究を進めた。特に, ラリタ-シュウィンガー作用素や四元数ケーラー多様体について集中的に議論した。

表現論または対称空間上の調和解析への応用を探るため, クリフォード解析の専門家であるベルギーの Eelbode 氏とコンタクトをとり, 数回行き来をしながら本研究に関する議論を行った。

国内研究集会(「量子化の幾何学」早稲田大学 2016, 「非可換幾何学と数理物理学」慶応大学 2015)を世話人の一人として開催し, 本研究に関連した研究者を招聘し, 議論を行った。

4. 研究成果

(1) 「捩じれワイゼンベック公式とその応用」について。

論文: Y. Homma, Twisted Dirac operators and generalized gradients.

2006 年頃から研究代表者や Semmelmann 氏らにより gradients に対するワイゼンベック公式が構築され, 幾何学の様々な場面で応用されてきた。一方, T. Branson 氏により「捩じれワイゼンベック公式」の存在(1998 年)は述べられていたが, 存在だけを証明したものであった。今回の研究成果は, その具体的な公式を与え, 幾何学への応用を可能にしたものである。さらに, ツイストしたディラック作用素の既約成分が gradients で表せるという基本的であるが未解決な問題を解決した。

ディラック作用素 D を既約同伴ベクトル束 V でツイストする。シュアの補題からツイストしたディラック作用素 D_V はいくつかの gradients の線形結合に分解する。しかし, シューアの補題における定数(各 gradient の係数)が零でないことは非自明であり, 周辺の研究者の間では問題となっていた。これを証明しなければ幾何学への応用が乏しくなってしまうのである。そこで, この問題を解決するため, 参考文献の表象計算と表現論における大定理(PRV 予想の Kumar による解決)を用いた。予想通り「零でない」という結果を得たが, 証明は PRV 予想という道具を利用した難解なものである。

さらに, その結果と作用素 D_V に対するワイゼンベック公式を用いて, 異なるベクトル束上の gradients に対する「捩じれワイゼンベック公式」を得た。これと参考文献により, gradients に対するワイゼンベック公式はすべて具体的に与えられたことになる。また, ツイストする同伴束 V を適当に変更することで, 既存のワイゼンベック公式を書き

換えたものを得ることができた。特に, V をうまくとることによりリヒネロビッツ-ラプラス作用素の固有値評価を与えることを示した。既存のワイゼンベック公式から, 固有値評価を直接証明するのは(一般的には)困難であるため, このような手法は今後も有用であろう。また, 4 次元多様体上のワイゼンベック公式を具体的にすべて書き下した。

さて, $D^2 D = D D^2$ という自明な式を利用することにより, リヒネロビッツ-ラプラス作用素と gradients の可換公式を与えることもできた。特に, アインシュタイン多様体上でラリタ-シュウィンガー作用素やツイスター作用素とラプラス作用素が可換であることを示した。これが, 次の研究成果を生むための布石となっている。なお, 可換公式は参考文献で一般化されている。

また, これらの研究成果により, 幾何構造を持つ多様体上の捩じれワイゼンベック公式(目的(2))を開発するためのアイデアを得た。目的(2)に対する研究は今後も継続する。

(2) 「ラリタ-シュウィンガー作用素と幾何構造の関係」について。

論文: Y. Homma and U. Semmelmann, The kernel of the Rarita Schwinger operator on Riemannian spin manifolds.

この研究成果は, Stuttgart 大学の Semmelmann 氏との共同研究により「ラリタ-シュウィンガー作用素の核」と「主要な幾何構造」との関係を解明したものである。

まず, アインシュタイン条件を課すことにより, ラリタ-シュウィンガー作用素 Q , ペンローズ作用素 P (ツイスター作用素), ディラック作用素, ラプラス作用素 がすべて可換となることを示した(研究成果(1))。そして, 本研究成果の要となる恒等式

$(Q^2 + a + b \text{Scal})(Q^2 + c + d \text{Scal}) = 0$ を得た。ここで a, b, c, d は定数であり, Scal はスカラー曲率である。ディラック作用素がラプラス作用素の根であることは有名であるが, 上式はラリタ-シュウィンガー作用素がラプラス作用素の 2 乗の根であることを示している。次に, 非負スカラー曲率のアインシュタイン多様体上で, ラリタ-シュウィンガー作用素の核 ($\text{Ker } Q$) とラリタ-シュウィンガー場全体 ($\text{Ker } Q$ と $\text{Ker } P^*$ の共通部分) が一致することを示した。ラリタ-シュウィンガー場とは, $\text{spin}-1/2$ での調和スピノール場を $\text{spin}-3/2$ へと拡張したものである。物理学の超重力理論における重力子の超対称パートナーであり現在でも活発な研究が行われている。一方, 幾何学ではラリタ-シュウィンガー場の研究はあまり発展しておらず, M. Wang による平行スピノール場の変形(リッチ平坦計量の変形と関係)や Hitchin による PSU(3) 構造に現れるぐらいである。今回の研究成果は, ラリタ-シュウィンガー場の幾何学的側面に新しい視点を与えるものであり, 幾

何学・物理学においてインパクトがある研究成果である。

具体的には次の研究成果を得た。

非自明なラリタ-シュウィンガー場をもつ (正および負の) ケーラー・アインシュタイン多様体の例を与えた。(証明方法は完全交叉に対して指数定理を使った)。

非自明なラリタ-シュウィンガー場をもつコンパクト型既約対称空間は8次元であり $Gr_2(C^4)$, HP^2 , $G_2/SO(4)$, $SO(6)/SO(2)SO(4)$, $SU(3)$ に限ることを示した。また、これらのラリタ-シュウィンガー場はすべて平行場である。(証明方法はワイゼンベック公式と分規則)。

なお、この消滅定理は Witten の剛性定理と関係している。

正の四元数ケーラー多様体で非自明なラリタ-シュウィンガー場をもつものは、 $Gr_2(C^4)$, HP^2 , $G_2/SO(4)$ の3つに限ることを示した。(証明方法: 四元数ケーラー多様体に対するワイゼンベック公式)。

カラビ-ヤウ多様体, 超ケーラー多様体上のラリタ-シュウィンガー場の次元をホッジ数により記述した。また、非自明なラリタ-シュウィンガー場をもつフェルマー曲面の例を与えた。(証明方法: リッチ平坦であることから、ラリタ-シュウィンガー場が調和形式で表せることを用いた)。

$Spin(7)$ 多様体, G_2 多様体のラリタ-シュウィンガー場の次元を、ベッチ数により記述した。(証明方法はと同様)。この結果は M. Wang により得られていたが、ここではより簡明な証明を与えた。

平行3/2スピノールをもつコンパクト既約多様体の分類定理を与えた。実際、それは超ケーラー多様体及び の対称空間に限る。(証明は、 ~ を利用)。

ラリタ-シュウィンガー場の可積分条件がリッチテンソルを用いて書ける(目的(4))に対応。その第一歩である。しかしながら、既知の結果である)

以上の研究成果を論文としてまとめ、学術誌へ投稿した。その他に、

積多様体上での公式。

対称空間上のスペクトル計算の方法(目的(5)に相当)。

なども得ることができた。

(3) 著書 本間泰史「スピン幾何学 -スピノール場の数学-」について。

スピン幾何学は、ディラック作用素, 指数定理, キリングスピノールや平行スピノール, 幾何構造などの話題を含み, 現代微分幾何学では不可欠な分野であるが, これまで日本語のテキストは存在しなかった。そこで, 日本の幾何学に貢献すべく, 学部4年生から研究者向けにスピン幾何学の基礎事項をまとめた。そして, 本研究の基礎となるものである。

実際, ディラック作用素に対するワイゼンベック公式, 指数定理の応用, カラ-ピヤウ構造・例外幾何構造・Nearly Kähler 構造などの幾何構造とスピノール場との関わりなどについて述べてある。

(4) その他の成果について。

・目的(5)に関して: 研究成果(2)で述べ得たように, ラリタ-シュウィンガー作用素の場合には対称空間上のスペクトル計算の方法を得た。また, 高次スピディラック作用素の2乗のスペクトル計算の方法を球面上で得た。これを対称空間へと拡張するのは今後の課題である。

・目的(6)に関して: 考察した結果 gradients を用いて構成した楕円複体で, 興味深いものは既存のもの(ドラム複体や4次元自己双対多様体上の Hitchin 複体)しかないことがわかった。

参考文献:

Y. Homma, Twisted Dirac operators and generalized gradients, Ann. Global. Anal. Geom. **50**, (2016), 101-127.

Y. Homma, Bocher-Weitzenböck formulas and curvature actions on Riemannian manifolds, Trans. AMS, **358**, (2006), 87-114.

Y. Homma and U Semmelmann, The kernel of the Rarita-Schwinger operator on Riemannian spin manifolds, arXiv:1804.10602, (2018).

U. Semmelmann, G. Weingart, The Standard Laplace Operator, arXiv:1708.04775 (2017).

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 件)

Yasushi HOMMA, Twisted Dirac operators and generalized gradients, 単著, 査読有, Ann. Global. Anal. Geom. **50**, (2016), 101-127.

[学会発表](計 3 件)

本間泰史, The Rarita-Schwinger operator on Einstein manifolds, 日本数学会 2015 年秋季分科会 2015 年 9 月, 京都産業大学。

本間泰史, The Rarita-Schwinger operator on Einstein manifolds, 数理物理・幾何ミニワークショップ 2015 年 8 月, 大阪市立大学

本間泰史, The Rarita-Schwinger operator on Einstein manifolds,

研究集会「非可換幾何学と数理物理学」
2015年7月，慶応大学

〔図書〕(計 1 件)

本間泰史(単著), スピン幾何学-スピノール場の数学-, 森北出版, 2016年, 256page.

〔その他〕

国際共同論文 1件 (学術誌へ投稿中):
Yasushi HOMMA and Uwe SEMMELMANN,
The kernel of the Rarita-Schwinger
operator on Riemannian spin manifolds,
math-arXiv: 1804.10602, 2018年
研究集会「量子化の幾何学2016」開催.
2016年12月 早稲田大学.
http://www.f.waseda.jp/homma_yasushi/ryoushika.htm
研究集会「非可換幾何学と数理物理学」
開催. 2015年7月, 慶応大学.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

本間 泰史 (Yasushi HOMMA)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号: 50329108

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし

(4) 研究協力者 なし