

令和 3 年 6 月 12 日現在

機関番号：33919

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2020

課題番号：15K04859

研究課題名(和文) 周期的極小曲面の変形空間の研究と応用

研究課題名(英文) The study on the deformation space of periodic minimal surfaces and its applications

研究代表者

江尻 典雄 (Ejiri, Norio)

名城大学・理工学部・教授

研究者番号：80145656

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：我々の世界でシャボン玉の形は丸いです。その証明は数学で与えられます。したがって球面以外の形は現れません。3次元平坦トーラス(2次元トーラスは、ドーナツの表面とみなせます)の世界でのシャボン玉の形は、どのようなものがあるかを考えます。1992年Ross氏は、シェーンのGyroid, シュワルツのP surface, D surfaceはシャボン玉であることを証明しました。我々は、H surfaceがシャボン玉であることとシュワルツのP surface を含む3次元flat torusを変化させてP surfaceはシャボン玉のままD surfaceに変化することを証明しました。

研究成果の学術的意義や社会的意義

n次元平坦トーラスの種数gの極小曲面のMorse indexを求めるために変形空間にspecial pseudo Kaehler structure with signature (p,q)を導き、qとMorse indexとの不等式とMorse indexを求めるalgorithmを与えた。結果としてたくさんの極小曲面のMorse index が求められ応用として3次元平坦トーラスのシャボン玉の多様性がわかったことです。

研究成果の概要(英文)：In our world, soap bubbles are round. The proof is given by Mathematics. Thus, shapes except sphere do not appear. In a 3 dimensional flat torus(2 dimensional flat torus may be the face of a doughnut), what is the shape of soap bubbles? In 1992, Ross proved that Shoen's Gyroid, Schwarz' P surface and D surface are soap bubbles. We proved that H surface is a soap bubble and Schwarz'P surface is transformed into D surface under the deformation of the 3 dimensional flat torus containing P surface.

研究分野：微分幾何学

キーワード：Riemann surface minimal surface flat torus Morse index signature

## 1. 研究開始当初の背景

N次元平坦トーラス内のコンパクト向き付け可能極小曲面のMorse index, nullityはN. Ejiri, A Differential-Geometric Schottky Problem, and Minimal Surfaces in Tori, Contemp. Math 308(2002) 101-144においてリーマン行列のなす空間上の関数(エネルギー関数と呼ぶ)の臨界点でのヘッシアンindexとnullityに関係していること示されていた。下記の研究の目的である分岐現象を調べるための理論的背景であるnullityの研究は、1998年Pirola, 1999年Arezzo and Pirolaによってなされていた。しかし驚くべきことに具体例のMorse index, nullityについては、S. Montiel and A. Rosが論文 Schrödinger operator associated to a holomorphic map, Global Diff. and Global Analysis, Lecture Notes in Math. 1481(1991) 147-174の中でSchwarz' CLP surfaceがindex=3, nullity=3, M. Rossが3次元平坦トーラスのシャボン玉についての論文であるSchwarz' P and D surfaces are stable, Diff. Geom. App. 2(1992) 179-195の中でSchoen's gyroid, Schwarz' P and D surfacesがMorse index=1, nullity=3であることを示して以来25年近く求められていなかった。具体例のMorse index, nullityを求めるために、上記のEjiriの論文で与えられた研究方向を推し進める必要があった。

## 2. 研究の目的

N次元平坦トーラス内のコンパクト向き付け可能極小曲面の分岐現象の研究、即ち、平坦トーラスの変形に伴うコンパクト向き付け可能極小曲面の変形空間およびその変形空間から平坦トーラスの変形空間への写像の特異点(主にラグランジュ特異点)の一般理論の構築を目的とする、そして一般理論の応用を考える。その具体的研究方向としては、次の(1), (2), (3), (4)の研究を目的とする

- (1) 一般理論の構築: コンパクト向き付け可能極小曲面の変形空間の構成
- (2) 具体的なコンパクト向き付け可能極小曲面のMorse index, nullityを求める
- (3) 3次元平坦トーラスのシャボン玉についてRossの結果の拡張
- (4) 物理化学のソフトマターで研究されている「周期構造と構造間転移」との関係

## 3. 研究の方法

N次元平坦トーラスの種数gの向き付け可能極小曲面の変形空間の構造を研究する。その基本的な考えは、その変形空間をリーマン行列全体のなす空間上のパラメータを持つエネルギー関数のcritical pointの全体と考えることである。一般理論より変形空間からパラメータがなす空間のcotangent bundle with the canonical symplectic formへの実isotropic mapが存在する。パラメータを増やすことによってcritical pointの全体が種数gのリーマン面からn次元ユークリッド空間への multivalued branched minimal immersionsの空間となる。Pirola, Arezzo and Pirolaの結果からこのcritical point全体は、複素解析空間となる。したがって極小曲面の拡張された変形空間の研究には複素解析を使うことができる。

## 4. 研究成果

### (1)について

N. Ejiri, A generating function of a complex Lagrangian cone in  $H^n$ , to appear in Comm. Anal. and Geom.

一般理論の構築として、上記のパラメータ空間のcotangent bundleを複素 $2n$ 次元complex symplectic vector spaceと考えるとき、上記のreal isotropic mapはcomplex isotropic mapとなることがわかる。更に、この写像は複素周期写像となることが示される。特に、この複素解析空間の既約成分がnon-degenerate critical pointを持てば、複素周期写像はcomplex Lagrangian coneを与える。この結果を用いてnon-degenerate critical pointsの各連結成分にspecial pseudo Kähler structure with signature  $(p, q)$ を導けることを示した。応用として $q$ とMorse indexとの間の不等式を与え、Morse index, nullityを求めるalgorithmを得た。この結果は、Pirola, Arezzo and Pirolaの結果を深めている。

### (2)について

N. Ejiri and T. Shoda, On hyperelliptic minimal surfaces with even genus, Current Developments in Differential Geometry and its Related Fields, 3 (2015) 129-138.

では、余次元が高い場合に一般理論の応用として具体例のMorse index, nullityを求めた。

Ejiri Norio, Shoda Toshihiro, The Morse index of a triply periodic minimal surface, Differential Geometry and its Applications, 58(2018) 177-201.

ではよく知られた古典的な例のone parameter familyであるH family, tP family, tD family, rPD family, tCLP familyについてMorse index, nullityを求めた。

Ejiri Norio, Shoda Toshihiro, The Existence of rG Family and tG Family, and Their Geometric Invariants, Mathematics 8(2020) 1693~1693.

よく知られた例はMeeks familyに属している。しかし属さないSchwarz' H surface, Schoen's gyroidがある。ここではSchoen's gyroidを含むone parameter familyについてMorse index, nullityを求めた。

(3)について

Ejiri Norio, Shoda Toshihiro, Stability of triply periodic minimal surfaces, Differential Geometry and its Applications, 67(2019) 101555-101555.

RosはSchoen's gyroid, Schwarz' P and D surfacesがシャボン玉であることを示している。論文ではH family, tP family, tD family rPD familyの中でMorse index 1の極小曲面はシャボン玉であることが示された。

(4)について

N. Ejiri, S. Fujimori and T. Shoda, A remark on limits of triply periodic Minimal surfaces of genus 3, Topology and its Applications 196(2015) 880-903

N. Ejiri, S. Fujimori and T. Shoda, A construction of a two-parameter family of triply periodic minimal surfaces, Kobe J. Math. 35(2018) 45-93

Ejiri Norio, Fujimori Shoichi, Shoda Toshihiro, On limits of triply periodic minimal surfaces, Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -), 197(2018) 1739-1748

上記の3つの論文では、ソフトマターにおける「周期構造と構造間転移」の一つと思われるtriply periodic minimal surfaceが退化する時generic limitに現れるsingly periodic, doubly periodic minimal surfaceを求めた。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Ejiri Norio, Shoda Toshihiro	4. 巻 67
2. 論文標題 Stability of triply periodic minimal surfaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Differential Geometry and its Applications	6. 最初と最後の頁 101555 ~ 101555
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.difgeo.2019.101555	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 N. Ejiri, S. Fujimori and T. Shoda	4. 巻 35
2. 論文標題 A construction of a two-parameter family of triply periodic minimal surfaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Kobe J. Math.	6. 最初と最後の頁 45-93
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ejiri Norio, Fujimori Shoichi, Shoda Toshihiro	4. 巻 197
2. 論文標題 On limits of triply periodic minimal surfaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Annali di Matematica Pura ed Applicata (1923 -)	6. 最初と最後の頁 1739 ~ 1748
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10231-018-0746-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ejiri Norio, Shoda Toshihiro	4. 巻 58
2. 論文標題 The Morse index of a triply periodic minimal surface	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Differential Geometry and its Applications	6. 最初と最後の頁 177 ~ 201
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.difgeo.2018.01.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 N. Ejiri, S. Fujimori and T. Shoda	4. 巻 196
2. 論文標題 A remark on limits of triply periodic minimal surfaces of genus 3	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 880-903
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2015.05.014	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 N. Ejiri and T. Shoda	4. 巻 3
2. 論文標題 On hyperelliptic minimal surfaces with even genus	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Current Developments in Differential Geometry and its Related Fields	6. 最初と最後の頁 129-138
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ejiri Norio, Shoda Toshihiro	4. 巻 8
2. 論文標題 The Existence of $rG$ Family and $tG$ Family, and Their Geometric Invariants	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematics	6. 最初と最後の頁 1693 ~ 1693
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3390/math8101693	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計1件 (うち招待講演 0件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 江尻典雄
2. 発表標題 トーラスの極小曲面に関するWeierstrass data 空間の構造
3. 学会等名 水戸幾何小研究集会
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------