2版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　６ 月 ２７ 日現在

機関番号：３３９１９

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2018

課題番号：１５K０４８６０

研究課題名（和文）クリフォード環とCayley数の幾何学への応用

研究課題名（英文）Applications of Clifford and Cayley algebras to Geometry

研究代表者

橋本　英哉（Hashimoto, Hideya）

名城大学・理工学部・教授

研究者番号：６０２１８４１９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：可符号3次元リーマン多様体上の3次元接空間から作られる Clifford 環 が 8 次元の線型空間を為すことと3次Clifford環の零因子全体の為す集合の存在を用いて，この線型空間上にCayley 代数の構造を導入し，それを用いて任意の可符号3次元リーマン多様体上にファイバーを例外型単純Lie 群G2とする fibre bundle を構成できることを示した。
A型のコンパクト対称空間内の非平坦な全測地的曲面と Cartan 埋め込みを合成することにより、A型のコンパクト Lie 群 SU(n) 内への非平坦な全測地的曲面の多項式による表示を与えた。

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究は例外型単純Lie 群の対称性を幾何学的に理解する事にある。古典群の対称性では得られない特殊な対称性を用いて幾何学的によい条件を満たす等質空間の構成を行う事が可能であることを示すことが学術的意義である。特に例外型単純Lie 群G2の幾何学的対称性についての研究を行っている。ある四元数ケーラー多様体（8次元）上の2種のTwistor空間の射影空間への具体的な埋め込みを表現できることを示した。

研究成果の概要（英文）： We obtain the method of construction of the G2 principal fibre bundle of any oriented 3-dimensional Riemannian manifold, by using Clifford algebras and octonions.
We give some fibre bundle structures related to the special unitary group SU(4). The classical Lie group SU(4) is isomorphic to the spinor group Spin(6) which is a double covering group of the special orthogonal group SO(6). This isomorphism gives rise to some fibre bundle structures on some homogeneous spaces related to SU(4). By using this structure, we give the relationship between the non-flat totally geodesic surfaces in SU(4)/SO(4) and in Sp(2)/U(2) =Spin(5)/U(2).

研究分野：幾何学

キーワード：Clifford環　Cayley 代数　例外型単純Lie群G2　非平坦な全測地的曲面　スピノール 群　零因子　既約表現

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

1．研究開始当初の背景

Cayley 代数 (8 元数) O 内の可符号 6 次元部分多様体、及び、6 次元球面の不変部分多様体のグラスマン幾何学について研究を積み重ねてきた。この幾何学の特徴は簡潔に述べれば通常のユークリッド幾何学の等長変換群 (平行移動 R^n と直交群 O(n) の半直積) R^n ＊O(n) (n = 7, 8) をその部分群の作用に変更することである。特にこの作用する群を ImO ＊ G_2 あるいは O＊Spin(7) に縮小することにより幾何学としての差異がどの様に現れるかを調べることが問題である。ここに G_2 は例外型単純 Lie 群(Cayley 代数 O の積を保つ自己同型全体の為す群)、Spin(7) ⊂ SO(8) は SO(7) の普遍被覆群を表す。作用する群を縮小したのであるから作用する空間(例えば 6 次元球面 S^6=G_2/SU(3)、7 次元球面 S^7 =Spin(7)/G_2、Cayley 代数 O={O＊Spin(7)}/Spin(7)等) の部分多様体の合同類は、リーマン幾何学の範疇では捉えられない不変量を必要とする。その不変量として概複素構造、付随する標準的な 2 次微分形式 (Kaehler 2-form)、結合的 3 次微分形式 (associative 3-form)、Cayley 4 次微分形式 (Cayley 4-form) に注目する必要がある。さらに合同類を決定する要因 はグラスマン多様体の分解だけではなく、Stiefel 多様体の G_2, Spin(7) による軌道分解が必要であることが理解されてきた。この様な現象はより高い次元の Spinor 群の作用する空間でも自然に起こっているものと予想されるがその全貌は未だ良く理解されていない対象であり本研究を行う強い動機付けである。

２．研究の目的

2 次形式(通常は非退化)をもつ n 次元ベクトル空間を V とし、これに付随した Clifford 代数を Cln とする。ここで Bott-Milnor の定理(1958) は n 次元ベクトル空間 R^n に零因子を持たない分配法則を満たす積が存在するならば、n=1, 2, 4,または 8 であり，R 上の normed algebra は実数体 R，複素数体 C，四元数体 H または 八元数体 octonion のいずれかに同型である。 従って、Bott-Milnor の定理から n = 4 であれはCln は零因子を持たなければならない。にも関わらず零因子全体の為す集合は明白な形で記述されていない。 Cln(n = 4) の零因子全体の為す集合を決定する事は一つの目的である。 Clifford 環を用いた幾何学を発展させるため Clifford 代数の unit 全体の為す乗法群の Maurer-Cartan form とその可積分条件条件を記述し高次の Spinor 群の忠実な表現を記述しその幾何学を展開する。Clifford 群 及び Spinor 群の不変量，幾何学的不変量と Calibration の存在についても研究を進展させる。

3.研究の方法

Clifford 環、Clifford 群、Spinor 群の表現を Cayley 代数を用いて具体的に記述し、微分幾何学として応用できる形で表現を与えるため Cartan の moving frame method を用いて Clifford 群の Maurer-Cartan form 及び可積分条件を記述する。これを用いて多様体上の Clifford 束、Spin 束の幾何学的実現を与える。この構造を応用して、Clifford 環及び Spinor 群の作用す る多様体上に fibre bundles を構成する。具体的な空間として G_2/SO(4), Spin(7)/$Sp(1)^3$ 等 の Quaternionic Kaehler manifold を用いて対応する Twistor 空間を Clifford 環を通して実現 する。その具体化から幾何構造に適合した部分多様体(例えば概正則曲線等)の構成とその moduli 空間の記述することである。

Clifford 環、Clifford 群に関して次の計画を実行する。 Cl_n(n >3) の零因子全体の為す集合を決定する事は一つの基本的な問題である。現在まで Cl_3(8 次元)の場合には 2 個の 4 次元

平面の直和集合となることを確認した段階であり、この幾何学への応用として 3 次元多様体上のある特殊な G_2 構造に近い fibre-bundle が構成できる事が理解できたが、その幾何構造の積分可能性については今後の課題であり、この問題に着手する段階にきている。この fibre-bundle の構成は新しい研究対象でありまだ未知の幾何学 的対象であるから今後の発展が望める興味深い対象である。さらに、高次元の Clifford 代数にお ける零因子全体の為す集合に関しては今後の課題でありさらに研究を重ねる予定である。また、 逆元を持つ元全体のなす(Clifford 代数の)乗法群の構造も高次元の場合には具体的に記述されてはいない事に注意する。その大きな理由は Cl_n の次元が 2^n であり実表現が大きくなる点にある。その解消方法として Cayley 数と Clifford 代数の Universal enveloping property を用いる事 によって表現空間の次元を縮小した表現が得られる。ここに本研究テーマを設定した理由がある。特にその Maurer-Cartan form の具体的な記述には階層構造とアルゴリズムの存在が予見 され非常に興味深い対象であり、その表現を与える事は為すべき課題である。さらに、Clifford 代数は計量構造のみから決まるという点から考えるとリーマン多様体上の Clifford 束の具体化は重要な課題である。

rank2 の対称空間 $G_2/SO(4)$ の平坦でない全測地曲面の構成方法は G_2 の twistor 空間の立場からみると 6 次元球面 $S^6 = G_2/SU(3)$ 内の 3 次元 totally real 等質部分多様体と $G_2/SO(4)$ の平坦でない全測地曲面は、SU(2) から G_2 への表現が形を変えて得られていることが解る。この事は次の様な、より一般的な S^6 内の totally real submanifold (これを概正則曲線の tube と考え) に対して何らかの $G_2/SO(4)$ 内の曲面が対応している可能性を示している。従って、本研究では $G_2/SO(4)$ の平坦でない全測地曲面が $G_2/SO(4)$ を 4 元数 Kaehler 多様体 と考えたときにどの様な不変部分多様体になるかを考察する。

４．研究成果

1．可符号 3 次元リーマン多様体上の 3 次元接空間から作られる Clifford 環 が 8 次元の線型空間を為すこと、さらに，3 次 Clifford 環の零因子全体の為す集合 の存在を用いて，この 8 次元の線型空間上に Cayley 代数の構造を導入した。これを用いて任意の可符号 3 次元リーマン多様体上にファイバーを例外型単純 Lie 群 G2 とする fibre bundle を構成できることを示した (大橋氏 (名工大) との共同研究)。

2．古典型対称空間の非平坦な全測地的曲面の間下氏による分類を研究し、A 型のコンパクト対称空間内の非平坦な全測地的曲面と Cartan 埋め込みを合成するこ とにより、A 型のコンパクト Lie 群 SU(n) 内への非平坦な全測地的曲面の多項式による表示を大橋氏、鈴木氏 (名工大) との共同研究において与えた。この表現を応用することにより 3 種類の A 型のコンパクト対称空間内の非平坦な全測地的曲面の相互関連を与えることができた。特に SU(2) から SU(n) への既約表現と非平坦な全測地的曲面の構成方法との関連が明確になった。さらに、断面曲率の統一的な計算方法を与えた。

3．低次元のスピノール 群 Spin(n) ($n<7$) の古典群との対応を spin(7) からの表現を用いて統一的に実現し、SU(4) (A 型)，SO(5)(B 型)，SP(2) (C 型)，SO(6) (D 型) 内の非平坦な全測地的曲面の間の相互関連を与えた(大橋氏 (名工大) との共同研究) 。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　3　件）

1. "Fundamental relationship between Cartan imbeddings of type A and Hopf fibrations." H. Hashimoto and Misa Ohashi , Contemporary perspectives in differential geometry and its related fields, 79-94,World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2018) (査読有り)
2. "G2 fibre bundle structure on an oriented 3-dimensional manifold." H. Hashimoto and Misa Ohashi , Note Mat. 37 (2017), suppl. 1, 87-92. (査読有り)
3. "Hopf fibration and Cartan imbedding of type AI." H. Hashimoto and Kazuhiro Suzuki , Current developments in differential geometry and its related fields, 155-163, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, (2016). (査読有り)

〔学会発表〕（計　3　件）

1. $G_2/SO(4)$ に関連した幾何構造　橋本 英哉　淡路島幾何学研究集会２０１６, 2016
2. G_2 に関連した等質空間の幾何構造の局所座標による具体化　橋本 英哉　多様体上の微分方程式,　2017
3. ***"Geometrical structures and the Calabi-Bryant formula of G_2,"*** H. Hashimoto ***ICDG2018, 2018***

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：

ローマ字氏名：

所属研究機関名：

部局名：

職名：

研究者番号（8 桁）：

(2)研究協力者

研究協力者氏名：間下　克哉、中田　文憲、大橋　美佐

ローマ字氏名：Mashimo Katsuya, Nakata Fuminori, Ohashi Misa

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。