

令和 5 年 6 月 4 日現在

機関番号：34504

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2022

課題番号：15K04861

研究課題名（和文）アフィン接続が与えられた多様体の幾何の多角的研究とその応用

研究課題名（英文）Diversified research on the geometry of affinely connected manifolds and its application

研究代表者

黒瀬 俊（Kurose, Takashi）

関西学院大学・理学部・教授

研究者番号：30215107

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,300,000円

研究成果の概要（和文）：空間や図形の点の局所的な連なり方を記述するための微分幾何における道具の一つであるアフィン接続について、応用も含めたさまざまな視点から研究を行った結果、微分幾何の手法を用いた統計学や情報理論の研究で現れるアフィン接続とリーマン計量の組の研究、アフィン平面やアフィン空間内の曲線の運動を用いた可積分系方程式の理論の幾何化とそれを利用した円周の微分同相群の研究、超曲面の一般化であるアフィン分布の幾何などで多くの知見を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

アフィン接続は微分幾何において重要な概念であり、微分幾何を他分野に応用する上でも基本的な道具となるものであるが、その一般的な性質については基礎的と思われる項目でも未解明のものが多い。本研究では、そのような未解明の性質を探求するにあたって統計学・情報理論や可積分系理論といった応用分野の視点も取り入れて行うことにより、幾何的にも応用的にも重要な知見を得ることができた他、今後の研究に資すると考えられる課題を発見することができたことは学術的に意義あることである。

研究成果の概要（英文）：In this research, geometry of affine connections, one of the tools in differential geometry for describing how points in spaces or figures locally connect, was studied from various viewpoints including applications. As a result, we obtained many findings in the study of statistical structures, which are pairs of affine connections and Riemannian metrics that appear in differential geometric research of mathematical statistics and information theory, the geometric study of integrable systems using motion of curves in affine planes and affine spaces with its application to the diffeomorphism group of a circle, and the study of affine distributions, which are generalizations of hypersurfaces in affine spaces.

研究分野：アフィン接続の微分幾何学

キーワード：統計多様体 幾何的ダイバージェンス 双対平坦構造 曲線の運動 幾何的ミウラ変換 曲線の空間上の多重ハミルトン系 中心アフィン平面曲線 アフィン分布

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

アフィン接続は、多様体内に与えられた曲線に沿って接ベクトルの平行移動を定めるものであり、これにより多様体の各点の接空間のつながり方が定められ、多様体の曲がり方をはかる曲率が定義される。リーマン多様体においてリーマン計量に対して定められるレビ・チビタ接続はアフィン接続の一種であり、この接続を通してリーマン曲率が定義される。リーマン多様体は古くから深く研究されてきた対象であり、その意味では付随するレビ・チビタ接続もよく研究されてきたといつてよいであろう。しかしながら、本研究課題の申請時において、レビ・チビタ接続ではない一般のアフィン接続の幾何は、たとえば「ある種の平坦性(アフィン平坦性、射影平坦性など)を持つ」「次元があまり高くなく、群作用で不変性を持つ」などの限定された状況を除けば、研究が十分なされているとは言い難かった。一方、1980年代頃から研究が始まった「現代的なアフィン超曲面論」・「ヘッセ幾何」・「情報幾何」ではレビ・チビタ接続とは限らない一般のアフィン接続が現れ、それぞれの幾何において重要な役割を果たしていた。従って、これらの分野で得られている成果を検討することで一般のアフィン接続研究における重要な指針が得られるだけでなく、それらの分野への応用を意識することでいたずらな一般論に陥る危険を回避しつつ研究を進められることが期待された。

2. 研究の目的

本研究の当初の目的は、アフィン接続が与えられた多様体およびその部分多様体の幾何を、可積分系理論・幾何学的関数論・アフィン超曲面論・ヘッセ幾何・情報幾何などへの応用を念頭において、多角的・総合的な観点から研究することであり、より具体的には、アフィン空間内の部分多様体の運動から生ずる可積分系方程式の性質の幾何的な解明、特定の曲率を持つヘッセ構造の構成と分類、アフィン接続が与えられた多様体の接束の双曲性の判定、閉曲面上に入る統計構造の特徴づけ、アフィン空間の凸領域における撞球の研究などを目標としていた。

3. 研究の方法

「2. 研究の目的」に挙げた目標は、「1. 研究開始当初の背景」で述べたようにアフィン超曲面論や、ヘッセ幾何、情報幾何など応用数学も含めたいいくつかの分野に背景を持っており、相互に関係する部分も多い。そのため、研究を進めるにあたっては、背景となっている各分野に関して十分な理解を持っておくことが重要であった。そこで、まずはそれまでの研究で比較的準備も整っていた「可積分系方程式が付随するアフィン空間の運動の幾何」と「統計多様体の幾何」から研究を開始し、一方で研究範囲を拡大するため、関係分野の学会・研究集会への参加や専門家との交流を活発に行って、各分野の最新の情報の収集や研究打ち合わせ、成果発表を行うことで、必要知識と新たな着想や課題発見のための刺激の充足をはかった。

4. 研究成果

(1) 統計多様体の幾何構造に適合した二点関数(ダイバージェンス関数)について、特に1-共形平坦な統計多様体に対して定義される幾何的ダイバージェンスと呼ばれるものを中心に研究を行い、以下の成果を得た。

1 1-共形平坦統計多様体の統計部分多様体に対して幾何的ダイバージェンスが部分多様体に引き継がれるための必要十分条件を与えた。また、別の研究者によって最適輸送理論の観点から導入されたダイバージェンス関数と幾何的ダイバージェンスの関係の解明、標準性をもったダイバージェンス関数の微分方程式系を用いた構成などについても成果を得た。ダイバージェンス関数は統計多様体の幾何と統計学・情報理論を結びつける情報幾何の重要な対象の一つであり、ダイバージェンス関数に関して得られた以上の成果は、応用面から見ても重要な意義をもつものと考えられる。

2 統計多様体上に与えられたダイバージェンス関数が応用上大きな役割を果たせるかどうかはガウスの補題型命題と呼ばれる命題が成り立つかどうかによるところが大きい。現在、1-共形平坦統計多様体上の幾何的ダイバージェンスに対してガウスの補題型の命題が成り立つことが知られているが、このような命題が成り立つような形で統計多様体を一般化することは、情報幾何への応用で重要であると考えられるだけでなく、アフィン接続の幾何における非常に興味深い研究対象を与えることになる。そこで、2次元の場合にガウスの補題型命題が成り立つようなアフィン接続とリーマン多様体の組を具体的に構成することを試みた。その結果、アフィン接続とリーマン計量が満たすべき必要条件を得たほか、アフィン接続が平坦である場合はほぼ統計多様体に限られることがわかった。そこで、今後の課題として、上に述べた必要条件をさらに精緻なものにし、アフィン接続が平坦でない具体例を構成することを考えている。

(2) 有限集合上の確率分布の空間における最適輸送問題の解空間上に、双対平坦な幾何構造を導入し、その情報幾何な性質を調べた。このような最適輸送問題は、単純なコスト関数だと線形計画問題になるため、一般に境界条件に対する最適解の滑らかさを保証することができない。そ

ここで本研究では、有限集合上の確率分布族を q -正規分布族とみなし、コスト関数を q -エントロピーを用いて変形することによって、初期条件に滑らかに依存する最適解を構成した。そして、これを用いて解空間上に、双対平坦構造を自然な形で誘導できることを示し、さらにこの最適輸送問題で得られる最適コスト関数が、この双対平坦構造の双対ポテンシャル関数に一致することなどの結果を得た。これらの結果は数学的に整っているだけでなく、いくつかの応用分野、例えば画像処理や信号処理、AI などへの応用が見込めるものと考えている。また、最適コスト関数を使った新たなダイバージェンス関数も提案したが、その性質や応用を調べることは今後の課題である。

(3) アフィン平面(あるいはより一般の空間)の曲線の運動から生ずる可積分系方程式の性質を研究し、以下の成果を得た。

1 変形 Korteweg-de Vries (KdV) 方程式(または非収束型変形 KdV 方程式)と KdV 方程式間のミウラ変換が、ユークリッド平面曲線(またはミンコフスキー平面曲線)と等積中心アフィン平面曲線の対応という形で幾何化できるという既知の事実が、球面・双曲平面(またはド・ジッター曲面)上の曲線と等積アフィン平面曲線の対応に連続的に一般化できることを示した。さらに、ド・ジッター曲面の場合は、ミウラ変換を与えるもう一つの幾何的変換でミンコフスキー平面の場合には連続的につながらないものがあることを発見した。これらの結果は可積分系理論の幾何化において一つの意義ある結果であるというだけでなく、今後これらの平面・曲面上の曲線の運動に幾何的に多重ハミルトン系としての記述を与える上で大きな手がかりとなるものである。

2 等積中心アフィン平面閉曲線の運動で、曲率の変化が KdV 方程式に従うものは等積中心アフィン平面閉曲線の空間 M 上の多重ハミルトン系として表される。一方、 M には円周の向きを保つ微分同相群 G が単純推移的に作用する。そこで、空間 M 上の多重ハミルトン系が G 上でどのように表現され、 G の微分同相群としての性質とどのように関係しているかを調べた。その結果、 M 上の多重ハミルトン系を構成する(前)シンプレクティック形式の系列の最初の二つが張るベクトル空間は、位相幾何で知られている G 上の二つの左不変閉 2-形式が張る空間に対応することがわかった。さらに、これらの 2-形式のモーメント写像の性質や、 G のリー環のコホモロジー群の生成元との関係を M と G それぞれの幾何を用いて調べた。また、高次元空間の等積中心アフィン曲線論を用いてこれまでの成果を一般化するため、高次元等積中心アフィン曲線論に現れる複数の曲率が G の作用によってどのように変化するかを調べた。KdV 方程式が円周の微分同相群やその中心拡大である Virasoro 群と密接に関係していることはすでに知られていることであるが、今回の成果はより幾何的な観点から両者の関係を調べる方法を与えるものであると考えている。

3 アフィン平面において、一般線形群の作用下で曲線の性質を調べる中心アフィン平面曲線論は、特殊線形群の作用下で考察する等積中心アフィン平面曲線論とかなり様相が異なっており、基本的な事項でも未知のことが多い。本研究においては、中心アフィン平面曲線の運動において非収束型変形 KdV 方程式が現れ、その運動が閉中心アフィン平面曲線の空間におけるハミルトン系として記述されること、非収束型変形 KdV 方程式と KdV 方程式間のミウラ変換が中心アフィン平面曲線と等積中心アフィン平面曲線の間の対応として幾何化できることを示した。また、現時点で可積分系方程式とは直接関係しないが、中心アフィン曲率の正負や周期性と曲線の概形の関係についていくつかの知見を得て、閉中心アフィン平面曲線の周期が正の下限を持つとの予想を得た。これは中心アフィン平面曲線論の研究を進める上で興味深い課題となるものと思われる。

4 空間曲線の渦糸方程式に従う運動に対応するリーマン球面上の曲線の運動を調べ、特に非線形シュレディンガー方程式が付随するリーマン球面上の閉曲線の運動に対して三重ハミルトン系としての記述を得た。これはこれまで知られていた可積分系方程式が付随する曲線の運動には見られなかった現象であり、この相違が何に由来するものであるかを調べることは今後の大切な課題の一つであると考えている。

(4) アフィン空間・ユークリッド空間の超曲面を抽象化した概念であるアフィン分布・ユークリッド分布を考え、その基礎理論を整備したほか、3次元球面のユークリッド分布で、誘導計量は球面の標準計量と等長であるが、誘導接続の曲率が 0 となるものを構成した。これはユークリッド空間の超曲面としては存在しないものであり、超曲面と分布のずれを具体化した例の一つとして、ユークリッド分布やアフィン分布の幾何の研究を進めていくための手がかりとなるものである。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Kurose Takashi, Yoshizawa Shintaro, Amari Shun-ichi	4. 巻 -
2. 論文標題 Optimal transportation plans with escort entropy regularization	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Information Geometry	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s41884-021-00058-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Park Hyeongki, Kajiwara Kenji, Kurose Takashi, Matsuura Nozomu	4. 巻 10
2. 論文標題 Defocusing mKdV flow on centroaffine plane curves	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 JSIAM Letters	6. 最初と最後の頁 25 ~ 28
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.14495/jsiaml.10.25	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Takashi Kurose	4. 巻 -
2. 論文標題 A certain ODE-system defining the geometric divergence	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Information Geometry	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s41884-023-00110-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 7件/うち国際学会 2件）

1. 発表者名 黒瀬俊
2. 発表標題 統計多様体上の幾何的ダイバージェンス再考
3. 学会等名 ミニワークショップ「統計多様体の幾何学とその周辺（10）」（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 黒瀬俊
2. 発表標題 等積中心アフィン平面曲線のなす空間と円周の微分同相群
3. 学会等名 研究集会「微分同相群と平面閉曲線のなす空間」(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Takashi Kurose
2. 発表標題 Geometric framework of information geometry from the viewpoint of affine hypersurface theory
3. 学会等名 The 18th International Conference, Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Information Geometry and Affine Differential Geometry III (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 梶原 健司, 黒瀬 俊, 松浦 望, 朴 炯基
2. 発表標題 Explicit formula for mKdV flow on centroaffine plane curves
3. 学会等名 日本応用数理学会2017年度年会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 黒瀬 俊, 松浦 望
2. 発表標題 ミンコフスキ平面上および2次元ド・ジッター空間上の曲線から等積中心アフィン平面曲線へのある変換
3. 学会等名 日本数学会2017年度秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 黒瀬俊
2. 発表標題 ガウスの補題型命題とヘッセ構造の一般化
3. 学会等名 ミニワークショップ「統計多様体の幾何学とその周辺(8)」(招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Takashi Kurose
2. 発表標題 Miura transformation and geometry of curves
3. 学会等名 The 2nd OCAMI-KOBE-WASEDA joint International Workshop on Differential Geometry and Integrable Systems (招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 黒瀬俊
2. 発表標題 等積中心アフィン平面閉曲線の空間上の高次 KdV 流と多重ハミルトン系
3. 学会等名 RIMS研究集会「可積分系理論の諸分野への応用」(招待講演)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 黒瀬俊
2. 発表標題 中心アフィン曲線の曲率の符号と曲線の概形
3. 学会等名 ミニワークショップ「統計多様体の幾何学とその周辺(7)」
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 黒瀬俊
2. 発表標題 ガウスの補題型命題とヘッセ多様体の一般化
3. 学会等名 研究集会「数理と工学の接続と調和」(招待講演)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------