

令和元年6月24日現在

機関番号：37112

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04864

研究課題名(和文) 完備フィンスラー多様体の凸性

研究課題名(英文) Convexity of complete Finsler Manifolds

研究代表者

塩濱 勝博 (SHIOHAMA, Katsuhiko)

福岡工業大学・付置研究所・研究員

研究者番号：20016059

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円

研究成果の概要(和文)：凸性の概念は幾何学のみならず、数学、工学等多くの自然科学分野において基本的な概念である。非対称距離構造を持つフィンスラー多様体の様々な構造を調べた。フィンスラー多様体では測地線の助変数を逆転したものが測地線と異なるという極めて特異な性質を持つ。2点間の距離が非対称である現象により、フィンスラー幾何学の研究はリーマン幾何学とは全く異なる困難を伴う。我々は凸関数、線形関数及び切断跡、共役跡の諸性質を深く追求した。その結果、リーマン幾何学ではあり得ない様々な現象を見出す事が出来た。主な研究成果は米国、ドイツ、印度、ハンガリー等の一流数学雑誌出版されている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

従来のリーマン幾何学では捉える事が出来なかった非対称距離構造の研究はフィンスラー幾何学の特徴を示している。フィンスラー多様体上の2点間の距離が往路と復路では異なるという点において、フィンスラー幾何学は現実の社会に即していると考えられる。特に、測地線の大域的挙動を調べる事が重要な研究課題となる。測地線の大域的研究に重要な役割を果たす切断跡、共役跡に関する基本的な性質をフィンスラー多様体上で研究した。研究成果は米国、ドイツ、印度、ハンガリー等の学術雑誌から発表されている。従って、今後の研究の指針がこれらの成果から示され各国でフィンスラー幾何学の研究が進むであろう。

研究成果の概要(英文)：The notion of convexity is very important in the study of natural science including mathematics and engineering. Finsler manifolds are considered as a natural extension of Riemannian manifolds. In particular, Finsler manifolds admit non-symmetric metric structure. This point is important for our investigation. The behavior of geodesics on Finsler manifolds is completely different from those of Riemannian manifolds. This is because of the property of the fundamental function.

We have investigated the structure of cut loci and conjugate loci on Finsler manifolds. In particular, the convexity of Finsler manifolds is one of the main theme of our investigation. Through our investigation, we have discovered new phenomena on the behavior of geodesics on Finsler manifolds, which have never seen on Riemannian world. Our main results have been in public from Pacific J. Math., Trans. Amer. Math. Soc., Math. Debrecen, Manuscripta Math.

研究分野：幾何学

キーワード：フィンスラー多様体 測地線 切断跡 共役跡 凸性 非対称距離構造 指数写像

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景:

完備フィンスラー多様体の大域的研究にはフィンスラー構造から導入される曲率の概念が極めて複雑で、放射曲率等の特殊な場合を除けば曲率の図形的概念が得られない。我々は距離関数の非対称性によって生じる様々な現象が発見されつつ有る。

2. 研究の目的:

凸性は幾何学、解析学及び工学の多くの分野において基本的且つ重要な概念である。リーマン幾何学では起こりえない現象をフィンスラー幾何学の世界に求める事を研究の目的とする。距離関数の非対称性によって引き起こされる現象の例としてとして、交通運搬手段の時間距離の最適航路を求める事は極めて重要である。測地線の挙動を研究する手段は切断跡と共役跡の性質を調べる事にある。これは本研究の全てに関わる基本的問題である。

3. 研究の方法:

本研究では距離関数の非対称性によって引き起こされる様々な現象を捉え、リーマン幾何学とフィンスラー幾何学の相違を明らかにする。J.H.C.Whiteheadの凸性定理は前世紀初頭に研究された極めて重要な定理である。凸関数の挙動をフィンスラー多様体上で考えるとき、凸関数の等位集合の直径が必ずしも単調増大ではないと考えられる。このような例が構成出来れば素晴らしい驚きを持って受け入れられるだろう。この点はリーマン幾何学とは全く異なる現象と言えるだろう。凸性はリーマン幾何でもフィンスラー幾何でも共通の性質である。しかし、フィンスラー計量から定まる測地線はパラメーターを逆転させると測地線の性質を失う。従ってフィンスラー多様体の共役跡や切断跡の研究が重要となる。

4. 研究成果:

我々の研究成果は国際的に有名なドイツ、アメリカ、ハンガリー・インド等から出版される一流雑誌に全て掲載されている。インドを初めとするネパール、ブータンの数学者達との交流も行われ、将来の更なる深い交流に結びつける事が期待される

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 8 件)

1. The Global Study of Riemannian-Finsler Geometry-to the memory of Marcel

Berger-Geometry in History, Editors S.G.Dani and N.Papadopoulos, to appear in Springer Nature Switzerland AG (2019). By K.Shiohama and B.Tiwari 査読有  
(1854年のリーマンの学位論文にフィンスラー幾何学の原点を求める事が出来る。20世紀の後半50年間は主にリーマン幾何学が世界的に広まりを示した。特に大域的リーマン幾何学の研究は曲率と位相の研究が大きく進展した。これらの足跡を集大成した。)

2. Blaschke Finsler Manifolds and Actions of Projective Randers Changes on Cut Loci. Trans. Amer.Math.Soc. Vol 371, No.10, 7433--7450 (2019), by N.Innami, Y.Itokawa, T.Nagano and K.Shiohama. 査読有

(一点の切断跡が球面である Blaschke フィンスラー多様体の切断点における測地線の挙動を調べる為には切断跡の特殊な性質を見抜く必要がある。この性質はリーマンの場合 Berger-Omori の定理としてよく知られている。この定理が Blaschke フィンスラー多様体でも私立する事を証明した。更に、ランダース変換が切断点にどのような影響を与えるかを観察した)。

3. DOI 10.5486/PDM.20117.7753 .

Parallel Axiom and the Second Order Differentiability of Busemann Functions, Publ. Math. Debrecen, Vol. 91/3-4, 403--425 (2017), by N.Innami, Y.Itokawa, T.Nagano and K.Shiohama. 査読有

(Busemann によって提唱された平行性の公理を満たす空間の微分可能性が何処迄主張出来るかを追求した。特に、フィンスラー多様体がアフィン関数を許容するとき、アフィン関数の定める勾配曲線は直線となり、その直線が定める Busemann 関数は元のアフィン関数と極めて密接な関係にある事が将来の研究課題となる)。

4. DOI 10.1007/s12044-016-0307-2 .

Strictly Convex Functions on Complete Finsler Manifolds, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), Vol. 126, No. 4, 623--627 (2016), by Y.Itokawa, B.Tiwari and K.Shiohama.

査読有

(完備フィンスラー多様体上に狭義凸関数が与えられているとき,等長変換群の性質を調べた).

5. DOI 10.5486/PDM.2016.7422

Geodesics in a Finsler Surface with one-parameter Group of Motions, Publ.Math.Debrecen, Vol.89/1-2, 137-160 (2016), by N.Innami, T.Nagano and K.Shiohama, 査読有

(完備フィンスラー曲面の切断跡はClairautの定理を応用する事で扱いが易くなる事がある.完備フィンスラー曲面上の測地線の大域的挙動と1-係数等長変換群の関係を調べた.特に測地線に沿う Fermi 座標を用いてリーマン計量が導入出来て放射曲率に相当する概念が有効となる.)

6. DOI 10.1007/s00229-015-0733-y.

The Cut locus and Voronoi Diagram of a Finite Set of Points in a Surface, Manuscripta Math. Vol. 148, 243--264 (2015), by N.Innami, K.Shiohama and Y.Uneme. 査読有

(2次元曲面上の有限個の点集合が定めるVoronoi図形の切断跡の構造を調べ,この方面の研究者達の批判を受ける目的でドイツの有名な雑誌に投稿した).

7. DOI 10.2140/s00229-015-0733-y .

Topology of Complete Finsler Manifolds Admitting Convex Functions, Pacific J. Math., Vol. 276, No. 2, 459--481 (2015), by S.Sabau and K.Shiohama. 査読有

(代表研究者は局所的に定数ではない完備非コンパクトなリーマン多様体の位相及び微分位相構造の研究を、Invent. Math.及び Ecol.Norm.sup,から出版した.この成果のフィンスラー版として,完備フィンスラー多様体上が自明でない凸関数がコンパクトな等位集合をを許容するとき,多様体の位相構造を調べた).

8. Riemannian and Finsler Geometry in the Large, Recent Advances in Mathematics, by K.Shiohama, RMS-Lecture Note Series No.21, 163--179, (2015) Ramanujan Mathematical Society, Pune, by K.Shiohama. 査読有

(極めて多数のフィンスラー幾何学研究者は印度において活動していると聞いていた.Indian Institute of Science and Education Research (IISER)の Ravi Kulkarni 教授が主催する第29回 Ramanujan Mathematical Society 年次総会がPune のにおいて開催された.彼等との研究交流を深める為に我が国のフィンスラー幾何学研究者達と参加し,講演した.)

[学会発表](計 6 件)

1. Affine Functions on complete Finsler manifolds, 第53回 フィンスラー幾何学シンポジウム, 福岡工業大学, 2018年11月16日. K.Shiohama
2. Convex functions on complete Finsler manifolds, 第52回 フィンスラー幾何学シンポジウム, 新潟大学五十嵐キャンパス, 2017年9月16日, K.Shiohama
3. Pointed Blaschke Finsler Manifolds, 第51回 フィンスラー幾何学シンポジウム, 鹿児島県自治会館, 2016年11月19日. K.Shiohama
4. Blaschke Finsler Manifolds, Tata Institute for Fundamental Research, Bangalore, INDIA, 2016年2月2日. K.Shiohama  
(Tata Institute of Fundamental Research の Aravinda 教授, Gururajya 講師達との研究交流の際に講演の機会を得た).

5. The Rauch Conjecture on Finsler Manifolds, International Conference on Differential Geometry, Analysis and Fluid Mechanics on the occasion of 40 year anniversary of Math. Dept. Kuvempu Univ., Shankaraghatta, INDIA , 2016年2月4日. K.Shiohama (Bangalore 郊外の Shivamogga にある Kuvempu 大学数学科開設 40 周年記念式典に主賓として招かれ ,Karnataka 州の地方新聞 8 紙が一面で取り上げた 講演には 4 大学の学生 , スタッフが聴講した . 本国際研究集会に参加した Nepal, Butan の数学者達との交流も出来た) .
6. Convex Fundtions on Complete Finsler Manifolds, Department of Math. Univ. Pune, INDIA, 2016年2月12日. K.Shiohama (Pune の Indian Institute of Science and Research において第 29 回 Ramanujan Mathematical Society の年次総会が開催され ,我が国のフィンスラー幾何学研究者 6 名と共に参加し , 招待講演を行った . 日本人数学者が Ramanujan Mathematical Society の年次総会に参加したのは初めてであると伝え聞いた) .

〔図書〕(計 0 件)

## 6 . 研究組織

### (1)研究分担者

研究分担者氏名 : 糸川 銚

ローマ字氏名 : Yoe Itokawa

所属研究機関名 : 福岡工業大学

部局名 : 情報工学部

職名 : 教授

研究者番号 ( 8 桁 ) : 90223205

### (2)研究分担者

研究分担者氏名 : 永野 哲也

ローマ字氏名 : Tetsuya Nagano

所属研究機関名 : 長崎県立大学

部局名 : 情報システム学部

職名 : 教授

研究者番号 ( 8 桁 ) : 00259699

### (2)研究協力者

研究協力者氏名 :

ローマ字氏名 :

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。