2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 ２０ 日現在

機関番号：１２４０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2017

課題番号：１５Ｋ０４８６７

研究課題名（和文）特異点論から見た曲面論と派生する微分方程式の研究

研究課題名（英文）Research on surfaces and related differential equations from the view point of singularity theory

研究代表者

福井　敏純（FUKUI, Toshizumi）

埼玉大学・理工学研究科・教授

研究者番号：９０２１８８９２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：3 次元ユークリッド空間内の 非特異曲面と円柱の接触は，満足すべき形で解析が終了した。特徴的な点を幾つか述べると，正則曲面に対し A1 ，A2，A3，A4，A5，D4，D5 接触する円柱の存在の必要十分条件を与えたこと，接触する円柱の母線方向を円柱方向(また母線方向)と定義し，その特異点の分類を与えたこと等があげられる。
3 次元ユークリッド空間内の非特異曲面を射影すると，輪郭の曲率と射影方向の法曲率の積として曲面のガウス曲率が復元される(Koenderink’s formulas)。この定理をホイットニーの傘を特異点として持つ曲面に拡張した。

研究成果の概要（英文）：The analysis of the contact between a nonsingular surface and the cylinders in the three dimensional Euclidean space was completed satisfactorily. We give the necessary and sufficient conditions for the existence of a cylinder which has A1, A2, A3, A4, A5, D4, D5 contact with a given nonsingular surface. Cylindrical directions is defined as a generatrix of the cylinder which has contact with A >=3. A classification of their singular point is also given. Koenderink's formula show that Gauss curvature equals to the product of curvature of contour
and normal curvature for a give direction. We also show Koenderink-type formulas for singular surface with Whitney umbrella.

研究分野：特異点理論

キーワード：特異点論

様式 C-19

1．研究開始当初の背景

R. Thom が著書「構造安定性と形態形成」(1972 年) の中で D_4 特異点の普遍開折を考察し，その幾何学的特徴が 3 次元ユークリッド空間内の曲面の臍点の幾何学的特徴と良く類似している事を指摘したが，これは I. Porteous が論文

The normal singularities of a submanifold, J. Differential Geometry 5 (1971), 543–564.

で，距離 2 乗関数の特異点を考察して，主曲率，焦点集合，A_2 接触球の核方向としての主方向，臍点の概念を再発見する事により正当化された. 彼は更に A_3 特異点に対応する峰点の概念を発見し，曲面論に新しい光を当てた。J. Montaldi は次の論文で部分多様体の接触の概念は，J. Mather が定義した特異点論の基礎概念である $\mathcal{K}$ 同値で接触写像を分類する事である事を確立した。

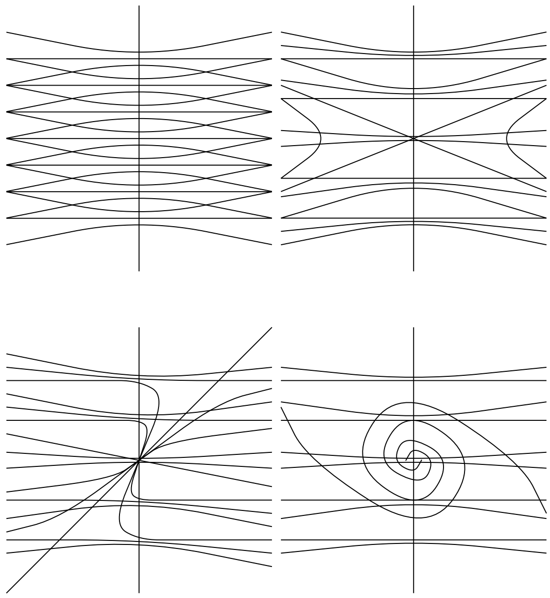
On contact between submanifolds, Michigan Math. J. 33 (1986), 195–199.

高さ関数の特異点を考察すると，放物軌跡や漸近方向を得ることが出来，その後，多くの研究者が，球面や平面との接触に着目し特異点論的立場から曲面の研究を行っている. その成果は例えば最近出版された次の本に纏められている。

S. Izumiya, M. C. Romero Fuster, M. A. Ruas, and F. Tari, Differential geometry from singularity theory viewpoint, World Scientific Pub Co Inc (2015/1/30).

研究代表者は，一般の正則曲面のすべての平行曲面の特異点の判定法 (T. Fukui and M. Hasegawa, Singularities of parallel surfaces, Tohoku Mathematical Journal 64 (2012) 387–408.) を与え，さらにホイヘンス の原理に着目し，平行曲面の概念を特異点としてホイットニーの傘を持つ曲面へと拡張し，それらの 特異点の判定法を与えた (T. Fukui and M. Hasegawa, Fronts of Whitney umbrella — a differential geometric approach via blowing up, Journal of Singularities, Vol. 4 (2012), 35–67).

与えられた曲面と平面および球との接触を考察する事が多くの微分幾何的概念と対応する理由の一つに平面や球の等質性が挙げられよう. ユークリッド空間の等質超局面は高橋恒郎氏により分類され ていて，3 次元ユークリッド空間内では，球，平面，円柱のいずれかである. 最近，研究代表者は残された $\mathbb{R}^3$ 内の等質曲面である円柱との接触を考察して，円柱的曲率とでも言うべき概念を得，A_3 接触する円柱の核方向を見ることで 3 次微分方程式を定義した. これは，平面や球との接触を調べた際の漸近方向および主方向の方程式の類似と考えられるが，後者が 2 次の微分方程式であることを考慮すると，3 次の微分方程式というのは特徴的な事実といえよう。現時点でわかっている興味深い帰結を少し述べる。一般の曲面を考察すると言う文脈で，放物軌跡に沿って 3 つのフローが接する状況が現れ，微小変動では回避できない特異点として，次のようなフローの特異点 が現れる事がわかっている。



2．研究の目的

曲面と等質超曲面との接触を調べることにより，曲面の微分幾何学的性質を明らかにする事を目的と

する。最も典型的な 3 次元ユークリッド空間内の曲面については，球面，平面，円柱の接触を調べる事が，課題となる。球との接触から主方向，平面との接触から漸近方向が定義されるので，円柱との接触からその類似物が定まる。より一般の状況では，一般の等質超曲面との接触によりその類似物が派生する。それらのフローの特異点の研究も行う. これは，特異点論的立場からの微分幾何学の研究の一環であり，特異点を許容する曲面の解析も行うことも想定している.

３．研究の方法

数学の研究であるので，論理的な推論に依る。
興味をシェアし合える研究者とファイスツーファイスでセミナー等を行い，議論をするのも有効な方法である。

４．研究成果

研究目的に掲げた，3 次元ユークリッド空間内の非特異曲面と円柱の接触は，満足すべき形で解析が終了し次の論文（長谷川大氏と中川幸一氏との共著）に成果がまとめられている。
T. Fukui, M. Hasegawa, and K. Nakagawa,
Contact of a regular surface in Euclidean 3-space with cylinders and cubic binary differential equations,
Journal of the Mathematical Society of Japan 69 (2017), 819–847.
特徴的な点を幾つか述べると，正則曲面に対し A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, D_4, D_5 接触する円柱の存在の必要十分条件を与えたこと，$A_{\geq 3}$ 接触する円柱の母線方向を円柱方向（また母線方向）と定義し，その特異点の分類を与えたこと等があげられる。これは，1 でも述べたように 3 次の常微分方程式で与えられ，発表した際は Farid Tari 氏等，関係する研究者からは，驚きを持って迎えられた。詳細は論文に譲る。

以下，研究目的に述べた特異点を許容する曲面の解析についての成果を述べる。

3 次元ユークリッド空間内の非特異曲面を射影すると，輪郭の曲率と射影方向の法曲率の積として曲面のガウス曲率が復元される（Koenderink's formulas)。この定理をホイットニーの傘を特異点として持つ曲面に拡張した。この解析は法曲率の定義式

$$\kappa_n = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

の解析が鍵となる。非特異曲面の場合はこの式の分母が決して 0 にならないので法曲率の振る舞いは素直であるが，特異曲面の場合は分母が 0 になり得るので，病的に見える現象が現れる。言い換えると極限の順序交換が成り立たない例を含むので，その場合は幾何的直感が働かない。そのような現象が分母が零になるような接ベクトル方向に現れるのである。法曲率の公式をホイットニーの傘を特異点として持つ曲面に対して解析して，Koenderink's formulas の類似が成り立つ場合を完全に解明し，また Koenderink's formulas の類似が成り立たない場合に起こりうる現象も完全に記述できた。成果は長谷川大氏と佐治健太郎氏の共著論文として次の論文として発表した。

T Fukui, M Hasegawa and K Saji,
Extension of Koenderink's formulas,
Journal of Gökova Geometry Topology, 10 (2016), 42–59

3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 内の非特異な空間曲線は曲率と捩率によって完全に記述される（空間曲線の基本定理）この事実は n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 内の非特異曲線に一般化されることはよく知られている。しかしながら特異点がある曲線の場合は佐々井崇雄氏による解析的な場合のみが知られていて C^∞ では未知であった。しかし本研究計画遂行中，重複度有限ならば解析可能である事に気づきその成果を次の論文にまとめて発表した。
T. Fukui, Local differential geometry of singular curves with finite multiplicities,

Saitama Mathematical Journal, 31 (2017), 79–88.
鍵となる事実を述べる。非特異曲線の場合は弧長変数を径数に取り計算するのが鍵であったが，特異曲線に対しては弧長は微分可能でなく，弧長径数を用いた直接の一般化はできない。佐々井崇雄氏は解くべき微分方程式を特異点を持つ微分方程式と捉え，解の特異点の解析をいわば正面から突破したが C^∞ の場合は弧長径数を用いた直接の一般化はできない。しかし弧長のうまい冪を考えるとこれを径数に取ることができることに気づき，曲率の体積公式を合わせると，重複度有限であるような特異曲線に対してもきれいな形での曲線の基本定理の一般化が証明できた。このような定式化は事前には予期してなかったが，生前，佐々井崇雄先生に親しくしていただいた身としてはこのような定理が証明できたのは大変嬉しい。

その後，さらに尖り辺 (cuspidal edge) と燕の尾 (swallowtail) についても解析をした。波面の特異点として，尖り辺 (cuspidal edge) および燕の尾 (swallowtail) は典型的であるが，それらの微分幾何的情報は現時点では必要十分な形でわかっているとはいえない。そこでテイラー展開に注目しテイラー展開の係数から微分幾何学的不変量を記述する事を試みた。一応の草稿は出来上がっているが，さらなる検証が必要と考えている。漸近方向や主方向の解析もほぼできているが特異点軌跡が放物的軌跡と交わる点では漸近方向の微分方程式が退化してしまい，計算が終わらないでいる。

またこの解析を 3 次元ミンコフスキー空間に拡張すべく，東北師範大学の数学統計学院の裴東河先生の博士課程学生である于海鴎氏を半年ほど招聘して研究した。こういう課題があるけど誰かやってみる人はいないかとの問いかけに彼女が手を挙げたのである。その結果，光的な対象が現れないとユークリッド空間の場合とほぼ同じである事がわかった。光的な対象が現れるときが問題であるが，例えば特異曲面の特異点軌跡が光的接ベクトルを持つ点があるなど，幾つかの場合に解析に成功している。この解析はまだ緒についたばかりで，成果と言えるものはあまり無いが，今後の研究に繋がる芽がここにあると判断している。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 3 編)

1. T. Fukui, Local differential geometry of singular curves with finite multiplicities,
Saitama Mathematical Journal, 31 (2017), 79–88.
2. T. Fukui, M. Hasegawa, and K. Nakagawa,
Contact of a regular surface in Euclidean 3-space with cylinders and cubic binary differential equations,
Journal of the Mathematical Society of Japan 69 (2017), 819–847.
3. T Fukui, M Hasegawa and K Saji,
Extension of Koenderink's formulas,
Journal of Gökova Geometry Topology, 10 (2016), 42–59

６．研究組織

(1) 研究代表者

福井　敏純　FUKUI, Toshizumi
埼玉大学・理工学研究科・教授
研究者番号 90218892