

令和元年6月5日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04873

研究課題名(和文) 低次元トポロジーと代数的・圏論的構造

研究課題名(英文) Low-dimensional topology and algebraic and category-theoretic structures

研究代表者

葉廣 和夫 (Habiro, Kazuo)

京都大学・数理解析研究所・准教授

研究者番号：80346064

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：(1)量子群の圏化の2圏構造をpivotalなものに変形できることを示した。(2)有限生成自由群の圏が対称モノイダル圏として可換Hopfモノイドにより自由に生成されるという事実の初等的・直接的な証明を与えた。(3)ハンドルボディ内の底タングルの圏BでKontsevich不変量を用いて定義される関手を構成し、圏Bの線形化のVassiliev-Goussarovフィルトレーションに付随する次数的線形圏の構造を決定した。(4)曲面の写像類群のJohnsonフィルトレーションとJohnson準同型の概念を、任意の群Gの任意のフィルター付き群Kへの作用に対して一般化した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

(1)の結果は量子群の圏化の図式的な研究をより容易にすることに役立つと考える。(2)は、有限生成自由群の圏という重要で基本的な圏の構造を、初等的な議論で明らかにしようとするもので、この圏のよりよい理解に貢献できたと考える。(3)は、結び目と絡み目の理論に多くの応用を持つと期待される圏Bの構造を、有限型不変量の観点から明らかにしている。(4)はJohnsonフィルトレーションのいろいろな一般化を統一的な観点から見る視点を与えている。本研究は純粋数学の研究であるので社会への直接的な貢献は目指していないが、数学を発展させること自体が社会への貢献であると考えます。

研究成果の概要(英文)：(1) We showed that one can deform the 2-category structure of the categorified quantum group into a pivotal one. (2) I gave an elementary, direct proof of the fact that the category of finitely generated free groups is freely generated as a symmetric monoidal category by a commutative Hopf monoid. (3) We constructed a functor on the category B of bottom tangles in handlebodies using the Kontsevich invariant, and determined the structure of the associated graded category for the Vassiliev-Goussarov filtration for the linearization of the category B. (4) We generalized the notion of the Johnson filtration and the Johnson homomorphisms for the mapping class groups of surfaces to the context of any action of any group G on any other group K with a filtration.

研究分野：低次元トポロジー

キーワード：量子不変量 量子群 圏化 Kontsevich不変量 底タングル Hochschild-Mitchellホモロジー Johnsonフィルトレーション

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 結び目の Jones 多項式や 3 次元多様体の Witten-Reshetikhin-Turaev 不変量などの、いわゆる量子不変量が発見されて以来、絡み目と 3 次元多様体の代数的な研究が盛んに行われている。量子不変量の研究においては圏論的な手法が非常に重要である。たとえば、3 次元多様体の量子不変量はコボルディズムの圏 Cob から、ベクトル空間の圏 Vect など代数的に定義される圏への関手(位相的場の理論)として定義される。このような研究の理論的な側面において重要な 2 つの課題は、Cob などの「位相的对象の圏」の構造を理解することと、そのような「位相的对象の圏」から Vect などの代数的な圏への関手を、量子群などの代数的なデータを利用して構成することである。

(2) Crane-Yetter、Kerler は、円周を境界とする曲面間のコボルディズムたちのなす braided モノイダル圏  $\mathcal{C}$  の中に braided Hopf モノイドの構造があることを発見した。筆者は、 $\mathcal{C}$  の部分圏とみなせる圏  $\mathcal{B}$  で、「ハンドルボディ内の底タングルのなす圏」と呼ぶものを導入した。圏  $\mathcal{B}$  は上記の Hopf モノイド構造を含み、しかも絡み目理論への応用に関しては  $\mathcal{C}$  よりも有用なものである。

(3) Khovanov ホモロジーの発見以来、量子不変量の圏化についての研究が盛んに行われている。Khovanov, Lauda, Rouquier による量子群の圏化についても、主に表現論の分野で盛んに研究されているが、Webster による量子群に付随する Reshetikhin-Turaev の絡み目不変量の圏化に用いられるなど、トポロジーの観点から見ても多くの興味深い進展がある。

### 2. 研究の目的

研究計画調書に記述した研究の目的は以下の 4 つである。

(1) 3 次元トポロジーにおける種々の代数的・圏論的構造について研究する。特に量子群(あるいはリボン Hopf 代数)に付随して、圏  $\mathcal{B}$ 、 $\mathcal{C}$  などに対して定義される関手的な不変量について研究する。

(2) 3 次元多様体と埋め込みの圏、および 3 次元多様体の量子基本群と量子表現空間について研究する。

(3) 量子群の圏化と、その絡み目・3 次元多様体の量子不変量への応用について研究する。

(4) 絡み目とクラスパーの Kirby カルキュラスについて研究する。

### 3. 研究の方法

(1) 研究目的のそれぞれについて、必要に応じて他の研究者と協力しながら、研究を行う。研究打ち合わせと研究発表のための旅費に研究費を使用する。また、研究に必要な書籍や文房具などを研究費で購入し使用する。

(2) 研究の進展状況に応じて、柔軟に目標を修正しながら研究を進めていく。研究計画に記述されていない事項についても、もしアイデアが得られれば、積極的に研究を進める。

### 4. 研究成果

(1) Khovanov, Lauda, Rouquier による量子群の圏化は 2 圏として実現されているが、この 2 圏において、1 射の 2 回双対がもとの射と同一になる(このとき 2 圏は cyclic または pivotal とよばれる)ように、量子群の圏化の 2 圏構造を変形することができることを、A. Beliakova 氏、A. D. Lauda 氏、B. Webster 氏と共同の論文「Cyclicity for categorified quantum groups」で得た。この結果により、量子群の圏化における 2 次元的なダイアグラムを使った計算がより容易になることが期待される。

(2) 有限生成自由群の圏  $\mathcal{F}$  は対称モノイダル圏として、可換 Hopf モノイド対象により自由に生成されることは良く知られている。この事実の組合せ的な直接的証明を与え、プレプリント「On the category of finitely generated free groups」にまとめた。この事実は Hopf 代数に関連した圏論的構造を研究するための基本的で重要なものであるため、より簡明な直接証明を与えることは十分に意義があることと考える。圏  $\mathcal{F}$  はハンドルボディ内の底タングルの圏  $\mathcal{B}$  をホモトピーで割ったものと思うことができ、圏  $\mathcal{F}$  の構造をよりよく理解することは圏  $\mathcal{B}$  の構造を理解するための出発点でもある。

(3) G. Massuyeau 氏との共同研究で、ハンドルボディ内の底タングルの圏  $\mathcal{B}$  において定義される関手  $Z$  を、タングルの Kontsevich 不変量を用いることにより、構成した。この関手は、以前に D. Cheptea 氏、G. Massuyeau 氏との共同研究において定義した、いわゆる LMO 関手の(部分的な)精密化となっている。関手  $Z$  は、ハンドルボディ内の底タングルの普遍有限型不変量

を与える。この事実により、圏 B の線形化の Vassiliev-Goussarov フィルトレーションに付随する次数付線形圏が、「Casimir テンソルを持つ可換 Hopf モノイド」によって自由に生成される対称的線形モノイダル圏と同型であることを証明することができた。

(4) 曲面の写像類群の Johnson フィルトレーションとその上の Johnson 準同型は、曲面の基本群への写像類群の自然な作用から、曲面の基本群の降中心列への振る舞いを見ることによって定義される、写像類群の研究において基本的かつ重要な道具である。G. Massuyeau 氏と共同の論文「Generalized Johnson homomorphisms for extended N-series」において、任意の群  $G$  の他の群  $K$  への作用と、 $K$  の extended N-series とよぶフィルトレーションが与えられたときに、群  $G$  に対して Johnson フィルトレーションと Johnson 準同型の類似物が構成できることを示した。たとえば、 $K$  の任意の正規部分群  $N$  の降中心列が  $K$  の extended N-series となることからわかるように、extended N-series の概念は非常に適用範囲が広いものである。

論文として未完成ではあるが、以下の研究を行った。

(5) 可換環上の(結合的)代数の Hochschild ホモロジーは、代数の森田同値の基本的な不変量であるが、この概念を線形圏に自然に一般化した Hochschild-Mitchell ホモロジーの概念が知られている。以前に、A. Beliakova 氏、A. Lauda 氏、Z. Zivkovic 氏、B. Webster 氏らと共同で、量子群の圏化の 0 次 Hochschild-Mitchell ホモロジーについて研究したが、この結果を一般次元の Hochschild-Mitchell ホモロジーに一般化する研究を行う過程で、Hochschild-Mitchell ホモロジーの計算に使う手法を、stratified 線形圏と呼ぶ、かなり一般的な線形圏の Hochschild-Mitchell ホモロジーの計算に利用できることに気づき、その一般的な理論について近年研究を行ってきた。stratified 線形圏には非常に多くの例があり、これらの線形圏の Hochschild-Mitchell ホモロジーを研究するのに利用できると期待している。また、この理論は線形でない普通の圏に対しても適用でき、この場合には stratified 圏の cyclic nerve の幾何学的実現のホモトピー型を求めるのに利用することができる。たとえば、有限集合と写像の圏、有限次元ベクトル空間の圏、2 次元のコボルディズム圏など、多くの自然に定義される圏にこの理論は適用できる。研究期間の後半では主にこれらの研究を進展させることに重点を置いて研究をした。2018 年 5 月にアメリカのコネル大学において講演を行い、この理論の概要について解説を行った。論文は現在準備中である。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 6 件)

K. Habiro, G. Massuyeau, Generalized Johnson homomorphisms for extended N-series, J. Algebra 510 (2018) 205-258 (査読あり)  
DOI:10.1016/j.jalgebra.2018.05.031

K. Habiro, T. Widmer, Kirby calculus for null-homologous framed links in 3-manifolds, J. Topology 10 (2017) 585-631 (査読あり)  
DOI:10.1112/topo.12017

A. Beliakova, K. Habiro, A. D. Lauda, M. Zivkovic, Trace decategorification of categorified quantum  $sl(2)$ , Math. Ann. 367 (2017) 397-440 (査読あり)  
DOI:10.1007/s00208-016-1389-y

A. Beliakova, K. Habiro, A. D. Lauda, B. Webster, Current algebras and categorified quantum groups, J. London Math. Soc. 95 (2017) 248-276 (査読あり)  
DOI:10.1112/jlms.12001

A. Beliakova, K. Habiro, A. D. Lauda, B. Webster, Cyclicity for categorified quantum groups, J. Algebra 452 (2016) 118-132 (査読あり)  
DOI:10.1016/j.jalgebra.2015.11.041

K. Habiro, T. T. Q. Le, Unified quantum invariants for integral homology spheres associated with simple Lie algebras, Geom. Topol. 20 (2016), 2687-2835 (査読あり)  
DOI:10.2140/gt.2016.20.2687

[学会発表](計 16 件)

K. Habiro, Unified quantum invariants of 3-manifolds, CQ3MI Summer School and Workshop, 2018/7/16-17, University of Southern California

K. Habiro, Hochschild-Mitchell homology of stratified linear categories, Topology Festival, 2018/5/13, Cornell University

葉廣和夫, 3次元トポロジーにおける圏論的構造について, 日本数学会年会企画特別講演, 2018/3/20, 東京大学

K. Habiro, Generalized Johnson homomorphisms for extended N-series, Tsuda University Topology Workshop, 2017/7/27, 津田塾大学

K. Habiro, The Kontsevich integral for bottom tangles in handlebodies: algebraic aspects, Johnson homomorphisms and related topics, 2017/5/23, 東京大学大学院数理科学研究科

K. Habiro, The Kontsevich integral for bottom tangles in handlebodies: algebraic aspects, Invariants in low dimensional geometry and topology, 2017/5/17, Centre International de Mathématiques et d'Informatique de Toulouse, Université Toulouse III Paul Sabatier

K. Habiro, The Kontsevich integral for bottom tangles in handlebodies, Low dimensional topology and number theory IX, 2017/3/18, AiRIMaQ Seminar Room, Innovation Plaza, 福岡市

K. Habiro, Extended Kontsevich integral for bottom tangles in handlebodies, Workshop on Volume Conjecture and Quantum Topology, 2016/9/9, 早稲田大学

K. Habiro, Category of handlebody embeddings, 2016 International Workshop on Low-dimensional Topology in Dalian, 2016/5/7, Dalian University of Technology

K. Habiro, On the category of finitely generated free groups, Low dimensional topology and number theory VIII, 2016/3/22, IMAQ Seminar Room, Innovation Plaza, 福岡市

K. Habiro, Category of bottom tangles with colored tangles, Séminaire Quantique, 2015/12/7, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Strasbourg

K. Habiro, Traces of categorified quantum groups, Braids, Configuration Spaces, and Quantum Topology, 2015/9/8, 東京大学大学院数理科学研究科

K. Habiro, Trace decategorification of categorified quantum groups, Diagram algebra and topology, 2015/8/4,5, Hotel Sports Lodge Itoman, 沖縄県糸満市

K. Habiro, Quantum groups and topology, Diagram algebra and topology, 2015/8/3, Hotel Sports Lodge Itoman, 沖縄県糸満市

K. Habiro, Functors on Lagrangian cobordisms associated to ribbon Hopf algebras, New Developments in TQFT, 2015/7/30, Center for Quantum Geometry of Moduli Spaces, Aarhus University

K. Habiro, Trace and categorification, Categorification in Algebra, Geometry and Physics (A conference in honor of the 60th birthday of Christian Blanchet), 2015/5/6, Institut d'Études Scientifiques de Cargèse

〔図書〕(計0件)

〔産業財産権〕

出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕

ホームページ

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~habiro>

プレプリント

K. Habiro, On the category of finitely generated free groups, arXiv:1609.06599  
<http://arxiv.org/abs/1609.06599>

K. Habiro, G. Massuyeau, The Kontsevich integral for bottom tangles in handlebodies,  
arXiv:1702.00830  
<https://arxiv.org/abs/1702.00830>

## 6 . 研究組織

(1)研究分担者

(2)研究協力者

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。