

平成 30 年 6 月 17 日現在

機関番号：14303

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04874

研究課題名(和文)非コンパクト多様体のエンドの幾何構造と微分同相群の位相幾何学的研究

研究課題名(英文)Study on diffeomorphism groups and geometric structure on ends of noncompact manifolds

研究代表者

矢ヶ崎 達彦 (Yagasaki, Tatsuhiko)

京都工芸繊維大学・基盤科学系・教授

研究者番号：40191077

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：幾何学において、多様体(局所的にユークリッド座標系を持つ空間)は重要な研究対象となっている。多様体の連続変換全体は同相群と呼ばれ、その性質の解明は多様体の幾何的理解にとって重要である。本研究では、ユークリッド空間のように無限に広がった距離多様体上で、一様同相群、すなわち一様連続性と呼ばれる距離に関するある種の一様性を持つ変換全体の成す群、を対象として、多様体の距離から定まる一様位相とよばれる位相の下でのこの群の局所及び大域的な連続変形性を考察し、一様同相群がこのような連続変形性をもつような距離多様体のクラスを与えた。

研究成果の概要(英文)：In geometry, various classes of manifolds constitute important subjects of research. The whole continuous transformations on a manifold form a group, which is called the homeomorphism group of this manifold. Study of this group plays an important role to understand the geometric nature of the manifold. In this research we are concerned with open manifolds with metrics, as Euclidean spaces, and the groups of uniform homeomorphisms on those manifolds. A uniform homeomorphism is a transformation on a manifold which satisfies a sort of uniform estimate of continuity, called the uniform continuity, with respect to the given metric. Those groups of uniform homeomorphisms are naturally endowed with the uniform topology induced from the metrics on the manifolds. With this uniform topology we studied local and global continuous deformation of those groups and obtained a list of metric manifolds for which the groups of uniform homeomorphisms admit local or global continuous deformations.

研究分野：位相幾何学

キーワード：微分同相群 一様同相群 非コンパクト多様体 エンド 距離幾何 リーマン計量 双曲幾何

1. 研究開始当初の背景

多様体の微分同相群の研究は、多様体の幾何的性質の理解にとって重要である。非コンパクト多様体の微分同相群の典型的な位相として、コンパクト・開位相、Whitney 位相及び一様位相がある。これらの位相は、コンパクト多様体に対しては一致するが、非コンパクト多様体の場合には、その性質が大きく異なり、その理解は進んでいなかった。研究代表者は、まずコンパクト・開位相の場合の研究を進め、その後 Taras Banakh 氏、酒井克郎氏らとの共同研究により同相群及び微分同相群の Whitney 位相の包括的な研究を行い、その特性を解明した。次のステップとして、研究代表者は一様位相の下での一様同相の成す群の位相的性質の研究を進め、コンパクト距離多様体の距離被覆空間の一様同相群の局所可縮性を示した。さらに、ユークリッド空間の有界一様同相群が可縮なることを示していた。

2. 研究の目的

一様位相の下での一様同相群の大域的な性質は多様体のエンドでの距離の性質に大きく依存している。本研究では、この考察を発展させ、非コンパクト多様体の(微分)同相群や種々の部分群の位相的性質の、多様体のエンドの幾何的な構造との対応の体系的な研究を目標としている。特に、一様同相群に関しては、ユークリッド型、双曲型及び楕円型エンド上での一様同相群の大域変形性の考察を目指した。また、微分同相群は、多様体上の様々な構造の成す無限次元空間に作用しており、微分同相群の変形性について考察するためには、これらの無限次元空間の位相的性質及び付随する作用の性質の考察が有用となる。特に、双曲型及び楕円型エンドの考察のために、リーマン計量の空間への作用等の関連する分野での考察と、その本件研究への応用を目指した。

3. 研究の方法

研究代表者は、次の方法で研究を進めた。

- (1) 関連する研究会への参加・研究討論、
連携研究者との情報交換
- (2) 日本数学会及び国内の関連する研究集会での研究発表
- (3) 国際会議における研究発表 (The 1st Pan Pacific International Conference on Topology and Applications, 2015, China)

4. 研究成果

距離多様体上の一様同相の成す群の一様位相の下でのホモトピー変形性を考察し、次の結果を得た。

(1) 局所変形性：Edwards-Kirby 局所変型定理は、位相多様体におけるコンパクト部分集合の近傍の埋め込みの空間における局所変形定理である。この定理の一様埋め込みの空

間への拡張を得るため、距離多様体の部分集合の一様近傍の一様埋め込みの空間に対して局所変形性を定式化し、この変形性の Formal な性質を考察した。特に、この変形性が、距離多様体の部分集合について(弱い意味で)有限加法的であり、さらに多様体のエンドでの距離にのみ依存することを示した。コンパクト距離多様体上の距離被覆空間において一様埋め込みの空間がこの局所変形性を持つことを以前示していたが、この Formal な性質と組み合わせることで、離散群の幾何的な作用を持つ距離多様体上で一様埋め込みの空間が局所変形性を持つことを示すことが出来た。また、 n 次元ユークリッド空間や n 次元双曲空間はこの変形性を持つが、さらに加法性により任意のコンパクトリプシッツ距離多様体の 0 錐エンドも 0 に対してこの変形性を持つことが示される。特に、これらの距離多様体の一様同相群は局所可縮となる。

(2) エンド上での大域変形性：位相的に積の形をした適性距離を持つエンド上での一様埋め込みの空間の大域変形性を定式化した。この性質は、粗幾何的に一様な一様同相で保たれ、例として、コンパクトリプシッツ距離多様体の 0-錐エンド上の一様埋め込みの空間はこの大域変形性を持つ。さらに、このような大域変形性を有するエンドを持つ距離多様体の有界一様同相群は、このエンド上で点を動かさない一様同相の成す部分群への強変形レトラクトを持つことが示される。

(3) 一様イソトピー：距離空間上で一様イソトピーの概念を導入し、一様位相の下での一様同相群における連続曲線は一様イソトピーに対応することを示した。一方、Alexander トリックにより定義される 錐上の Alexander イソトピーは、レベル毎に一様同相だが、ユークリッド空間の場合でさえ一般に一様イソトピーにはならない。したがって、Alexander イソトピーで定義される 錐上の有界一様同相群の一点への変形ホモトピーは一般に連続にならない。しかし、無限遠で恒等写像に漸近する有界一様同相の成す部分群上では、この変形ホモトピーは連続となり、したがって、この部分群やコンパクト台をもつ一様同相の成す部分群が可縮となることがわかる。

一様埋め込みの空間や一様同相群の一様位相の下での位相幾何的研究は、これまで部分的な進展に留まっていたが、上記の結果は研究代表者が 2014 年に出版した論文と合わせて、この対象の体系的かつ包括的な記述を与えるものである。特に、(1)の一様埋め込みの空間の局所変形性に関する結果は、Edwards-Kirby 変型定理の一様埋め込み版の定式化とそれが成り立つ距離エンドの十分な例を挙げている。また、(2)の距離エンド上での大域変形の定式化と、例として

ユークリッド型の 0-錐エンドがこの性質を持つことを示したことは、今後の双曲型エンド及び楕円型エンドに関する一層の研究に向けての視点を与えるものである。さらに、(3)の Alexander イソトピーに関する考察は、これまで曖昧であった Alexander イソトピーと一様位相との関係を明確にしている。Alexander イソトピーが一様位相の下で連続曲線とならない例は、これまで文献上知られておらず、Alexander トリックによりユークリッド空間の一様同相群は可縮になるものと広い範囲で誤解されていたと思われる。(3)の結果は、コンパクトの場合からの安易な類推から生じるこのような誤解を一掃するものである。これらの研究結果に関しては、国際会議 The 1st Pan Pacific International Conference on Topology and Applications, 2015, Min Nan Normal University, Zhang Zhou, China 2015.11, 日本数学会 2017 年度 秋季総合分科会, トポロジー分科会, 山形大学, 2017.9 等 において研究発表を行った。

上記の一様同相群の研究では、多様体のエンドでの距離構造が主題となっているが、双曲型や楕円型のエンドでの考察をさらに進めるためには、リーマン計量に関係する分野からの一層の知識が必要になる。F. Thomas Farrell, Igor Belegardek 及びその共著者らにより高次元多様体上の正/負断面曲率を持つリーマン計量の成す無限次元空間の位相的な性質の研究が進展しており、その中で微分同相群のリーマン計量の空間への作用が重要な役割を果たしている。このような研究を本研究に結びつけるべく考察を行なった。また、いくつかの研究会において、リーマン計量の空間の位相的性質に関する諸結果の概要の紹介的な講演を行い、本研究へのフィードバックを諮った。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 1 件)

Tatsuhiko Yagasaki, Local and end deformation theorems for uniform embeddings, *Topology and its Applications*, 239 (2018) 191 - 225. DOI 10.1016/j.topol.2018.02.023 (査読有)

〔学会発表〕(計 10 件)

矢ヶ崎達彦, リーマン計量の空間の位相的性質に関する諸結果の紹介, 葉層構造と微分同相群 2017, 東京大学 玉原国際セミナーハウス, 2017.10.24.

矢ヶ崎達彦, Local and end deformation theorems for uniform embeddings, 日本数学会 2017 年度 秋季総合分科会, トポロジー分科会, 山形大学, 2017.9.14.

矢ヶ崎達彦, Survey on topological properties of spaces of Riemannian metrics,

RIMS 研究集会「変換群を核とする代数的位相幾何学」, 数理解析研究所, 京都大学, 2017.5.24.

矢ヶ崎達彦, 平面上の完備非負曲率リーマン計量の空間に関する Igor Belegardek の結果の紹介, 2016 年度 General Topology シンポジウム, 筑波大学, 2016.12.8.

矢ヶ崎達彦, 平面上の完備非負曲率リーマン計量の空間に関する Igor Belegardek の結果の紹介, 葉層構造と微分同相群 2016, 東京大学 玉原国際セミナーハウス, 2016.10.19.

矢ヶ崎達彦, Local and end deformation properties for uniform embeddings, RIMS 研究集会「集合論的位相幾何学および幾何学的トポロジーの最近の動向と展望」, 数理解析研究所, 京都大学, 2015. 11.16.

Tatsuhiko Yagasaki, Local and end deformation properties for uniform embeddings, The 1st Pan Pacific International Conference on Topology and Applications, 2015, Min Nan Normal University, Zhang Zhou, China, 2015.11.27.

矢ヶ崎達彦, Diffeomorphism groups of non-compact manifolds endowed with the Whitney C^∞ -topology, 葉層構造と微分同相群 2015, 東京大学 玉原国際セミナーハウス, 2015.10.27.

矢ヶ崎達彦, Local and end deformation properties for uniform embeddings, 第 8 回 早稲田幾何学的トポロジー研究集会, 早稲田大学 西早稲田キャンパス, 2015.9.5.

矢ヶ崎達彦, Local and end deformation properties for uniform embeddings, 研究会「尾鷲微分トポロジー 2015」尾鷲市立中央公民館, 2015.8.11.

〔その他〕

解説

矢ヶ崎達彦, Survey on topological properties of spaces of Riemannian metrics, RIMS 講究録 2060 「変換群を核とする代数的位相幾何学」 pp 70 - 76.

矢ヶ崎達彦, Local contractibility of groups of uniform homeomorphisms,

RIMS 講究録 1987, 「集合論的位相幾何学および幾何学的トポロジーの最近の動向と展望」 pp 43 - 48.

ホームページ等

京都工芸繊維大学 研究者総覧

(<https://www.hyokadb.jim.kit.ac.jp/profile/ja.b3ba40709f764a8b702569e202c117d3.html>)

Homepage of Tatsuhiko Yagasaki

[\(http://www.cis.kit.ac.jp/~yagasaki/\)](http://www.cis.kit.ac.jp/~yagasaki/)

6 . 研究組織

(1) 研究代表者

矢ヶ崎 達彦 (YAGASAKI, Tatsuhiko)
京都工芸繊維大学・基盤科学系・教授
研究者番号：40191077

(2) 連携研究者

井川 治 (IKAWA, Osamu)
京都工芸繊維大学・基盤科学系・教授
研究者番号：60249745