

令和 2 年 5 月 26 日現在

機関番号：18001

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04877

研究課題名(和文) 計算機によるロボット運動の配置空間の研究

研究課題名(英文) Research on the robot motion planning with the aid of a computer

研究代表者

神山 靖彦 (Kamiyama, Yasuhiko)

琉球大学・理学部・教授

研究者番号：10244287

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：ここ20年ほど、ロボット運動の配置空間のトポロジーが盛んに研究されている。本研究の目的は、計算機を利用することにより配置空間のトポロジーについて精密な成果を得ることである。特に次の2つの問題を重点的に考察する。

1. ロボット運動の配置空間上に、応用範囲の広いBott-Morse関数を構成すること。
2. 配置空間のホモロジー類のうち、部分多様体で実現できないものの性質を、対合を作用させることにより調べる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

工学における運動学の起源はジェームズ・ワットに遡る。1700年代に彼は、ワット蒸気機関と呼ばれる装置を開発した。その中核となるのがワット連鎖というものであり、1786年の特許出願でその連鎖が記述されている。その後、様々な連鎖が多くの人々によって発明されていき、運動学という分野に発展した。

連鎖を一つ与えたとき、可能な姿勢全体のなす空間を配置空間と呼ぶ。配置空間がどのような形であるか調べることは重要なことである。本研究の特色は、モース理論という幾何学の理論を駆使することにより、様々な配置空間を統一的に理解することである。

研究成果の概要(英文)：In these 20 years, configuration spaces of a robot motion planning are studied by many mathematicians. The purpose of this research is to obtain precise results on the space by using a computer effectively. In particular, we study the following two problems: First, we construct a Bott-Morse function on the configuration space of a robot motion planning. Second, we study the homology classes of the configuration space, which cannot be realized by submanifolds, by the action of an involution.

研究分野：幾何学

キーワード：計算機
結合角 ロボット運動 多角形のモジュライ空間 クモの巣装置 モース理論 レベルセット 対合

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

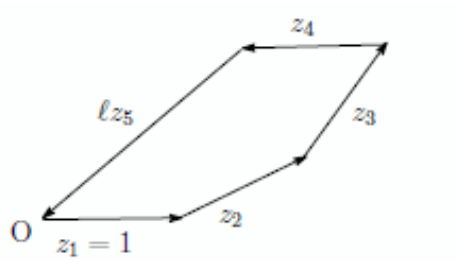
様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

1990年代からロボット運動の配置空間が盛んに研究されてきたが、主な題材は次の2つである。

- (1) ユークリッド平面や空間内の多角形のモジュライ空間
- (2) クモの巣装置

(1)について。下図はユークリッド平面内の辺長が1,1,1,1, ℓ の5角形である。この形全体をモジュライ空間と呼ぶ。



ここで、各 z_i は辺の単位ベクトルを表す。上図を一般化して、 n 角形のモジュライ空間を考える。但し、簡単のため、辺長は全て1とする。このモジュライ空間のホモロジー群は以下の2つの論文で、初めて全く異なった方法により決定された。

Y. Kamiyama et al., Homology of the configuration spaces of quasi-equilateral polygon linkages, Transactions of the American Mathematical Society 350 (1998), 4869-4896.

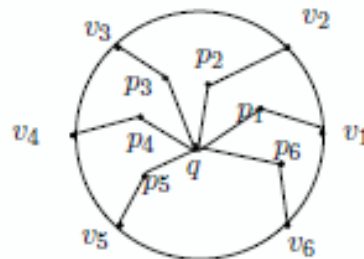
Y. Kamiyama et al., Topology and Geometry of equilateral polygon linkages in the Euclidean plane, Quarterly Journal of Mathematics 50 (1999), 463-470.

その後、辺長が任意である多角形のモジュライ空間のホモロジー群も Farber と Schütz により決定されたが、上記の論文は典型的状況を扱った重要な結果ということで、常に引用されている。

多角形のモジュライ空間が重要であるもう一つの理由は、3次元ユークリッド空間内の多角形のモジュライ空間はシンプレクティック商と解釈できるため、トーリクトポロジーやシンプレクティック幾何の典型的な例となっているからである。この方面で、以下の論文ではモジュライ空間の体積を始めて決定し、その後多くの数学者が一般化していく上で先駆的な仕事であった。

Y. Kamiyama et. al., Symplectic volume of the moduli space of spatial polygons, Journal of Mathematics of Kyoto University 39 (1999), 557-575.

(2)について。クモの巣装置とは、パワーショベルの腕を幾つか用意し、腕の一端は正多角形の頂点に固定し、もう一端は一斉に接合することにより得られるロボットである。下図は頂点が6つの場合である。ここで、各 v_i は固定されるが、各 p_i と q は動く。別の解釈として、 q は虫の胴体、各 p_i は関節、足先は各 v_i に固定されたと考えてもよい。



上図を一般化して、頂点数が一般の n の場合を考えたとき、配置空間は閉曲面であり種数も分かる。この事実は、配置空間をセル分割してオイラー標数を計算することにより分かる。実はこのセル分割は、配置空間上のモース関数に付随することが証明できる。この事実は次の論文で説明された。

Y. Kamiyama et al., The configuration space of the n -arms machine in the Euclidean space, Topology and its Applications 154 (2007), 1447-1464.

なお、クモの巣装置はトーリクトポロジーにおける実モーメント角複体の例となっており、多角形のモジュライ空間と同様、トポロジーにおける種々の分野と関連していることに注意する。

2. 研究の目的

本研究の目的は、計算機を利用することにより、次の2つの問題を研究することである。

- (1) 多角形のモジュライ空間とクモの巣装置を含むようなロボットを考え、その上の Bott-Morse 関数を構成すること。
- (2) 配置空間のホモロジー類のうち、部分多様体で実現できないものの性質を、対合を作用さ

せることにより調べること。

(1)について。多角形のモジュライ空間上の Bott-Morse 関数として有効なもの知られていない。一方、上述したように、クモの巢装置上の Morse 関数は知られている。この Morse 関数は対称性が高いものである。このことを手がかりに、まず多角形のモジュライ空間上にも対称性の高い Bott-Morse 関数を構成する。

次いで、この Bott-Morse 関数を、多角形のモジュライ空間とクモの巢装置を含むようなロボット上の Bott-Morse 関数に一般化する。計算が難しいのでコンピュータを利用しつつ考察を進める必要があるが、得られた結果が広範囲にわたるロボットの研究上重要になることは確実である。

(2)について。多角形のモジュライ空間のホモロジー群は知られているが、コホモロジー環は知られていない。未解決の理由は次のとおりである。中間次元未満のホモロジー群はトーラスのホモロジー群と同型なのだが、中間次元には正体不明のホモロジー類が生じる。この類はおそらく部分多様体で実現することは不可能で、その挙動を調べることは誰もできなかった。

報告者には、これら正体不明のホモロジー類に群を作用させることにより、その挙動を調べようというアイデアがある。つまり、多角形のモジュライ空間には複素共役が誘導する対合が存在する。軌道空間のコホモロジー環は知られている。その環の情報を精密に調べて、その情報を、対合が誘導する準同型写像の単因子に利用できないか？というものである。そのためには、コンピュータを用いて大きなイデアルのグレブナー基底を決定する必要がある。

3. 研究の方法

本課題は以下の 2 つの方法で行った。

- (1) 個人で行う研究。手計算の他にコンピュータ計算も含む。
- (2) 著名な数学者から論文のレビューを受ける。

(1)について。主な発表論文等の所にあるように、報告者は本研究期間内に 11 本の論文を出版してきた。その中には、コンピュータを駆使した仕事も含まれる。例えば、論文⑩、⑪の結果は従来の予想を覆す驚くべきものであった。最終的には手計算による証明を与えたが、その準備として 2015 年度に購入したパソコンと計算ソフト Mathematica を活用した数値計算を繰り返し、結果を予想した。

(2)について。

・2015 年 11 月に、Kyungpook National University の Young Jin Suh 教授が、報告者の一連の仕事に興味があるということで訪問してきた。特に、論文⑪は興味深いと言われた。

・論文⑧を後述する ResearchGate に掲載したところ、多くの数学者に閲覧されている。特に Санктペテルブルク研究所の Panina 教授から非常に興味深いと連絡を受けた。論文⑧は彼女の論文に引用され、一般化が考察された。

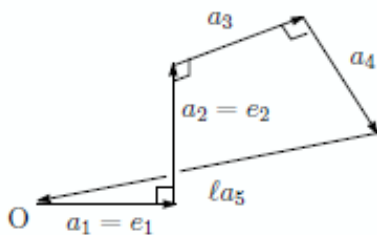
・Rochester 大学の Cohen 教授とは 30 年来の知り合いで、多くの有意義なコメントをもらってきた。現在もメールで頻繁に連絡を取り合っている。

4. 研究成果

以下の 3 つの成果が得られた。

- (1) 「2. 研究の目的」の(1)で述べた問題の完全な解決
- (2) 「2. 研究の目的」の(2)で述べた問題の完全な解決
- (3) ユークリッド平面や空間の代わりに球面を考えたとき、多角形のモジュライ空間の研究

(1)について。下図はユークリッド空間内の辺長が $1, 1, 1, 1, \ell$ の 5 角形で、隣接する 3 つの結合角は直角なものである。



これを一般化して、最終辺長のみ ℓ で、隣接 $n-2$ 個の結合角は直角である n 角形のモジュライ空間を問題にする。この問題は、タンパク質など化学の分野との関連において重要である。

論文⑪では ℓ が大きいとき、モジュライ空間は球面となることを証明した。そのこと自身興味深いが、多くの数学者に注目されているのは、証明の過程で Morse の補題を一般化したことである。

る。そのことについて説明する。一般に多様体 M 上に滑らかな関数 $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ が与えられたとする。 \mathbf{R} の元 a に対し、その逆像（つまり f で送ると a に行く M の元全体）をレベルセットと呼ぶ。 a は f の最小値より少し大きいとき、レベルセットがどうなるかを問題にする。もし f の最小値が「非退化な」臨界値ならば、レベルセットは球面である。このことは、モースの補題という大学初年次の微積分程度の知識で分かる。論文⑩の驚くべき結果は次のことである。「 f の最小値が退化臨界値でも、レベルセットは球面である。」

(2) について。中間次元のホモロジー群には対合が作用しているが、その表現を完全に決定した。結果は従来の予想を覆す、非常に驚くべきものであった。証明の流れは「2. 研究の目的」の(2)で述べたとおりである。つまり、軌道空間のコホモロジー環について十分な情報を得て、Wang 完全系列により、目的のモジュライ空間の情報に持ち上げることである。

(3) について。球面内の等辺多角形のモジュライ空間を考える。つまり、多角形の頂点は球面上にとり、2点間の距離は大円距離とする。球面は曲がった図形なので、モジュライ空間の研究はユークリッド空間に比べて遥かに難しい。それに関し、次の2点は特徴的である。

- ・ユークリッド空間における等辺多角形のモジュライ空間は辺長に依らないのに対し、球面においては辺長に依る。
- ・球面のモジュライ空間で辺長が殆どゼロの場合は、ユークリッド平面内のモジュライ空間と同一視できる。したがって、球面のモジュライ空間はユークリッド平面内のモジュライ空間を初等的な例として含む非常に重要な空間である。

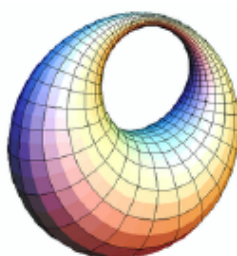
球面における等辺多角形のなすモジュライ空間について以下の成果を得た。

- ① 論文⑦では、辺長が円周率の半分、頂点数は任意のときに、モジュライ空間のオイラー標数を決定した。
- ② 論文④では上記の場合に、ホモロジー群を決定した。
- ③ 論文⑥では頂点数が5以下のとき、任意の辺長についてモジュライ空間の形状を決定した。特に5角形るとき、モジュライ空間は曲面となり興味深いので以下で結果を紹介する。

(I) θ を辺長とするとき、モジュライ空間の形状は以下の表で与えられる。ここで、 Σ_n は種数 n の閉曲面を表す。

θ	topological type
$4\pi/5 < \theta \leq \pi$	\emptyset
$4\pi/5$	{one point}
$2\pi/3 < \theta < 4\pi/5$	S^2
$2\pi/3$	Contains five singular points.
$2\pi/5 < \theta < 2\pi/3$	Σ_5
$2\pi/5$	Contains one singular point.
$0 < \theta < 2\pi/5$	Σ_4
0	{one point}

(II) $\theta = 2\pi/3$ のとき、モジュライ空間は Dupin サイクライドと呼ばれる下の図形を5個連結和したものである。



(III) $\theta > 2\pi/5$ から $\theta = 2\pi/5$ を経由して $\theta < 2\pi/5$ に移るプロセスは、一つのハンドルの中心をピンチして、次に離す。

今後の課題。論文⑥で鍵となる議論は、モジュライ空間を θ にわたって積み重ね、その上にモース関数を考えることである。つまり、モジュライ空間をレベルセットとして実現するわけである。臨界点での指数の計算には計算機を用いた。手計算では難しいため、現時点では5角形以下の場合しかできていないが、この方法を一般の n 角形に一般化することは興味深い問題である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 11件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Yasuhiko Kamiyama	4. 巻 22
2. 論文標題 A filtration of the configuration space of spatial polygons	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Advances and Applications in Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 67-74
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) http://dx.doi.org/10.17654/DM022010067	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yasuhiko Kamiyama	4. 巻 21
2. 論文標題 The orbit space of a hypersurface of a torus by an involution	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 JP Journal of Geometry and Topology	6. 最初と最後の頁 365-372
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) http://dx.doi.org/10.17654/GT021040365	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yasuhiko Kamiyama	4. 巻 19
2. 論文標題 Homology classes represented by hypersurfaces of planar polygon spaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Advances and Applications in Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 391-400
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) http://dx.doi.org/10.17654/DM019040391	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Yasuhiko Kamiyama	4. 巻 21
2. 論文標題 Homology of a certain hypersurface of a torus	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 JP Journal of Geometry and Topology	6. 最初と最後の頁 49-63
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) http://dx.doi.org/10.17654/GT021010049	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuhiko Kamiyama	4. 巻 19
2. 論文標題 Hypersurfaces of polygon spaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Advances and Applications in Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 51-59
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) http://dx.doi.org/10.17654/DM019010051	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuhiko Kamiyama	4. 巻 9842324
2. 論文標題 The configuration space of n-tuples of equiangular unit vectors for n=3, 4 and 5	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Chinese Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1-4
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) https://doi.org/10.1155/2018/9842324	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yasuhiko Kamiyama	4. 巻 20
2. 論文標題 A hypersurface of the configuration space of a spatial robot arm	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 JP Journal of Geometry and Topology	6. 最初と最後の頁 27-38
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) http://dx.doi.org/10.17654/GT020010027	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuhiko Kamiyama	4. 巻 39
2. 論文標題 A polynomial with coefficients in certain elementary symmetric polynomials	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications	6. 最初と最後の頁 389-399
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) http://dx.doi.org/10.17654/NT039030389	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuhiko Kamiyama	4. 巻 17
2. 論文標題 The configuration space of spatial polygones with restriction on the interior angles	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Advances and Applications in Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 211-242
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) http://dx.doi.org/10.17654/DM017020211	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuhiko Kamiyama	4. 巻 17
2. 論文標題 On the middle dimensional homology classes of equilateral polygon spaces	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Homology, Homotopy and Applications	6. 最初と最後の頁 1-12
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) http://dx.doi.org/10.4310/HHA.2015.v17.n2.a1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yasuhiko Kamiyama	4. 巻 493217
2. 論文標題 On the level set of a function with degenerate minimum point	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 1-6
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) http://dx.doi.org/10.1155/2015/493217	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計2件 (うち招待講演 2件 / うち国際学会 0件)

1. 発表者名 神山 靖彦
2. 発表標題 ロボットアームのモジュライ空間上のMorse関数
3. 学会等名 ホモトピー沖縄 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 神山 靖彦
2. 発表標題 多角形のモジュライ空間の中間次元ホモロジー群への対合作用
3. 学会等名 群作用と位相（招待講演）
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

ResearchGate https://www.researchgate.net/profile/Yasuhiko_Kamiyama

6. 研究組織		
氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考