

平成 31 年 4 月 26 日現在

機関番号：23903  
 研究種目：基盤研究(C) (一般)  
 研究期間：2015～2018  
 課題番号：15K04879  
 研究課題名(和文) 拡張結び目の研究

研究課題名(英文) Extended knot

研究代表者

鎌田 直子 (Kamada, Naoko)

名古屋市立大学・大学院システム自然科学研究科・教授

研究者番号：60419687

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：拡張結び目(twisted knot、仮想結び目、doodle)について研究した。twisted knotは仮想結び目の拡張であるが、その研究手法が容易にtwisted knotに定義できないことがある。twisted knotから仮想結び目への写像を構築し、それを利用してtwisted knotの不変量を定義し、その分類例を示した。仮想結び目から正規仮想結び目への2つの正規化写像を構築し、その手法の応用を示した。その手法から仮想doodleのカンダラ不変量を定義した。また正規化写像を一般化して仮想結び目のmod  $p$  almost classical化写像を導入し応用を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

拡張結び目には結び目を代数的に表す様々な方法に視点をおいて定義されたものもある。結び目不変量の中にはそれらの表し方と関係している場合もあり広い観点からのそれらの構造や性質の理解につながる。その中にはカンダラなどの代数構造をもつ不変量もあり代数への応用も期待される。また、拡張結び目と曲面結び目の関係はよく知られている。結び目不変量で拡張結び目の不変量として解釈されるものもある。このような視点から結び目の新しい研究手法を導入できる可能性があり結び目の分類にも寄与すると考えられる。

研究成果の概要(英文)：We studied twisted knots, virtual knots, virtual doodle. Virtual knots correspond to stable equivalence classes of knots in thickened oriented closed surfaces. Twisted knots correspond to stable equivalence classes of knots in thickened closed surfaces. For some research methods of virtual knots, it is not easy to extend to those of twisted knots. We constructed the map from the set of twisted knots to that of virtual knots. As an application of this map, we defined an invariant of twisted knots and showed some applications. By extending this method, we introduced two normalization maps from a set of virtual knots to that of normal virtual knots. We showed some applications of them. We defined quandle invariants of virtual doodles by use of one of normalization maps. By extending one of normalization maps, we introduced the map from a set of virtual knots to that of mod  $m$  almost classical virtual knots. We showed some applications of this map.

研究分野：幾何学

キーワード：結び目 仮想結び目 不変量

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

拡張結び目は結び目の概念を拡張して定義される。1997年にL.Kauffmanが口頭発表で導入した仮想結び目は Gauss chord ダイアグラムに視点をおいて拡張されたが、抽象結び目と仮想結び目との関係から仮想結び目の幾何学的解釈が明らかになり、それを拡張した twisted knot を M.Bourgoin が導入した。また、doodle や welded knot などの拡張結び目も定義されている。拡張結び目の不変量と結び目の不変量との関係や拡張結び目と曲面結び目との関係など、結び目の研究に寄与することが期待される。結び目を広い視野で研究解析することによって結び目の不変量などの構造や性質の究明につながるが見込まれる。

### 2. 研究の目的

結び目は結び目図式の Reidemeister 変形による同値類と見なすことができる。結び目図式に仮想交点や bar という付加構造を入れ、ある自然な変形による同値類として、仮想結び目、twisted knot、welded knot が定義される。これらはさまざまな観点から見た結び目の自然な拡張であり、特に仮想結び目、twisted knot は種数の高い閉曲面内の結び目図式の安定同値類に対応している。これらの拡張結び目の不変量として Jones 多項式、結び目群などが知られているが、更なる不変量の構成と分類手法の確立が必要である。球面内にはめ込まれた閉曲線である doodle に対しても、球面内の仮想交点を許した閉曲線を考えることで doodle の一般化などが考えられるが、詳しい研究はされていない。当研究ではこれら拡張された結び目や閉曲線の不変量の構成と分類手法の確立をめざす。

### 3. 研究の方法

(1) 拡張結び目の不変量の研究 (構成および性質の研究)、(2) 拡張結び目の不変量以外の分類手法の研究、(3) 拡張閉曲線の幾何学的解釈と分類手法の研究を行う。(1) に対しては、まず様々な拡張結び目の不変量や多項式不変量をコンピュータプログラムを作成する。研究の際はこのプログラムを利用して研究の際には不変量の計算を行う。(2)、(3) については twisted knot の分類手法を仮想結び目、仮想 doodle の分類方法に応用して、それらの幾何学的な解釈を考察する。それらの分類方法を発展させ新たな手法を検討する。

### 4. 研究成果

#### (1) 仮想結び目と twisted link に関して不変量とそれらの分類手法

仮想結び目は、厚みのある有向閉曲面内の結び目の安定同値類と対応している。一方、twisted link は厚みのある(有向とは限らない)閉曲面内の結び目の安定同値類と対応している。

twisted link の集合から仮想結び目の集合への写像(ダブルカバー)を導入して、不変量である twisted knot 群や twisted knot のカンドルは twisted link のダブルカバーの像の仮想結び目群やカンドルと同一視できることを示し、この手法を応用して twisted link の新しい不変量(twisted JKSS 不変量)を導入した。またそれを計算するコンピュータプログラムを作成した。それは入力した twisted link のダブルカバーを生成し、twisted JKSS 不変量を計算するプログラムであり随時研究で利用した。ある twisted link のクラスは多変数多項式不変量では分類が不可能であったが、twisted JKSS 不変量を計算して、それらを分類できることがわかった。

仮想結び目の特徴的なクラスに正規(チェッカーボード彩色可能な)仮想結び目がある。(古典的)結び目は正規であり、結び目の様々な不変量はその性質を利用して定義される。ダブルカバーの手法を利用して仮想結び目から正規仮想結び目への変換手法を定義し、そこから導かれる不変量である絡み数は L. Kauffman が[L. H. Kauffman, A self-linking invariant of virtual knots, *Fundamenta Mathematicae* 184 (2004), 135-158]で定義した不変量、odd writhe と同値であることを示した。

#### (2) 仮想 doodle の分類手法と不変量

S. Carter は、[J. Scott Carter, Classifying immersed curves, *Proceedings of the American Mathematical Society* 111 (1991), 281-287]において種数が正である閉曲面にはめこまれた閉曲線の研究を行なった。これらの閉曲線の2重点に上下の情報を与えたものが閉曲面上の link diagram であり、これらの閉曲線は拡張結び目と考えられる。一方、doodle は平面または球面にはめこまれた複数の閉曲線のある種の同値類で R. Fenn と P. Taylor が[R. Fenn and P. Taylor, Introducing doodles, *Topology of low-dimensional manifolds I*, *Lecture Notes in Mathematics* 722 (1979), 37-43]で導入した。さらに M. Khovanov が [M. Khovanov, Doodle groups, *Transactions of the American Mathematical Society* 349 (1997), 2297-2315]でその定義を単体の閉曲線に拡張した。

A. Bartholomew, R. Fenn, S. Kamada と研究代表者は従来から doodle の研究を行っていたが、doodle を種数が正である場合を含めた有向閉曲面にはめこまれた閉曲線の同値類として拡張し、それは仮想交点を含む仮想 doodle と同値であることを示し、そのガウスコードについても調べた。さらに twisted knot のダブルカバーの手法を応用して仮想 doodle のカンドル不変量を定義した。

仮想 doodle の新しい代数的構造を持つ集合 pre switch に値を持つ不変量を構築し,そこから導かれる整数値不変量を定義した。いくつかの仮想 doodle に対してこの不変量を計算して有効な不変量であることを示した。

閉曲面上の結び目ダイアグラムと関係のある twisted link のダブルカバーの手法を応用して仮想結び目から正規仮想結び目への新しい写像を構築した。研究代表者が 2015 年度に発見して [N.Kamada, Converting virtual link diagrams to normal ones, Topology and its applications, 230 (2017), 161-171] で発表した写像を改良したものである。今回導入した写像から同値な仮想結び目から同値な正規仮想結び目への写像が誘導できる。その手法を利用して新しい不変量を定義し,他の仮想結び目不変量との関係も発見した。

(3)仮想結び目の mod  $m$  almost classical 化

Alexander numbering とは結び目ダイアグラムの arc にあるルールで割り当てられた整数である。結び目ダイアグラムは常に Alexander numbering を持つ。Alexander numbering を持つ仮想結び目ダイアグラムを almost classical とする。almost classical 仮想結び目ダイアグラムを持つ仮想結び目を almost classical とする。また自然数  $m$  に対して  $m$  の剰余類で Alexander numbering を持つ仮想結び目ダイアグラムを mod  $m$  almost classical とする。mod  $m$  almost classical 仮想結び目ダイアグラムを持つ仮想結び目を mod  $m$  almost classical とする。mod  $m$  almost classical 仮想結び目は正規仮想結び目である。

仮想結び目の正規化写像を応用、拡張して、仮想結び目ダイアグラムから任意の自然数  $m$  に対して mod  $m$  almost classical 仮想結び目ダイアグラムへの写像を構築した。この写像は仮想結び目から任意の自然数  $m$  に対して mod  $m$  almost classical 仮想結び目への写像を誘導することを示した。さらにこの mod  $m$  almost classical 化写像の仮想結び目の分類への応用を紹介した。mod  $m$  almost classical 化写像を定義する際には oriented cut point 付きの仮想結び目ダイアグラムを考える。この oriented cut point を利用して L. Kauffman, H. Dye, Y. Miyazawa が導入した多変数多項式不変量の別定義を与えた。その定義によって mod  $m$  almost classical 仮想結び目の多変数多項式不変量の値の性質を発見した。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 (計 6 件)

1 Doodles on surfaces, A.Bartholomew , R.Fenn , N.Kamada ,S.Kamada, Journal of Knot Theory and Its Ramifications 27(12) 18570071-(26 ページ) 2018 年, 査読あり,  
DOI: [10.1142/S0218216518500712](https://doi.org/10.1142/S0218216518500712)

2 On gauss codes of virtual doodles, A.Bartholomew, R.Fenn, N.Kamada, S.Kamada, Journal of Knot Theory and Its Ramifications 27(11) 1843013 (26 ページ) 2018 年 10 月, 査読あり,  
DOI: [10.1142/S0218216518430137](https://doi.org/10.1142/S0218216518430137)

3 Coherent double coverings of virtual link diagrams, N. Kamada, Journal of Knot Theory and Its Ramifications 27(11) 1843004(18 ページ) 2018 年 10 月, 査読あり,  
DOI: [10.1142/S0218216518430046](https://doi.org/10.1142/S0218216518430046)

4 Converting virtual link diagrams to normal ones, N. Kamada, Topology and its Application 230 161-171 2017 年, 査読あり,  
DOI: [10.1016/j.topol.2017.08.032](https://doi.org/10.1016/j.topol.2017.08.032)

5 A twisted link invariant derived from a virtual link invariant, N. Kamada, Journal of Knot Theory and its Ramifications 26 1743007 (9 ページ) 2017 年, 査読あり,  
DOI: [10.1142/s0218216517430076](https://doi.org/10.1142/s0218216517430076)

6 Double coverings of twisted links, N. Kamada , S. Kamada, Journal of Knot Theory and its Ramifications 25 1641011 (22 ページ) 2016 年, 査読あり,  
DOI: [10.1142/S021821651641011X](https://doi.org/10.1142/S021821651641011X)

〔学会発表〕 (計 24 件)

1 Invariants and mod  $m$  almost classical virtual links, N. Kamada, 国際会議「Algebraic and Combinatorial Structures in Knot Theory (Code: SS 9A) at the AMS Spring Central and Western Joint Sectional Meeting」 2019 年,招待講演

A multivariable polynomial invariant of virtual links with cut systems, N. Kamada, 国際会議「2019 KMJ Conference for Accreditation Strategies and the 2019 Winter TAPU Workshop on Knot Theory and Related Topics」 2019 年,招待講演

A conversion of virtual links into mod  $p$  almost classical virtual links, N. Kamada, 国際会議「The 14th East Asian Conference on Geometric Topology」 2019 年,招待講演

仮想結び目の多変数多項式不変量と oriented cut points, 鎌田直子, 「2018 年度琉球結び目セミナー」, 2018 年

Cyclic coverings of virtual knots, 鎌田直子, 「拡大 KOOK セミナー2018」2018 年

Coverings of virtual links based on mod  $p$  Alexander numbering, N. Kamada, 国際会議「The 10th KOOK-TAPU Joint Seminar on Knots and Related Topics」2018 年,招待講演

Coherent double covering diagrams of virtual links, N. Kamada, 国際会議「Knotted embeddings in dimensions 3 and 4」 2018 年,招待講演

Coherent double covering diagrams of virtual knots, N. Kamada, 国際会議「The 13th East Asian School of Knots and Related Topics」 2018年, 招待講演

Double coverings of virtual doodles and their invariants, N. Kamada, A. Bartholomew, R. Fenn, S. Kamada, 国際会議「The 2nd Pan Pacific International Conference on Topology and Applications」 2017年, 招待講演

Invariants of virtual doodles, N. Kamada, A. Bartholomew, R. Fenn, S. Kamada, 国際会議「4th Russian-Chinese Conference on Knot Theory and Related Topics-2017」2017年

11 The double covering method for twisted knots, 鎌田直子, 「Intelligence of Low-dimensional Topology」 2017年, 招待講演

12 仮想結び目から正規仮想結び目への写像, 鎌田直子, 「東京女子大学トポロジーセミナー」, 2017年, 招待講演

13 Virtual doodles and their invariants, N. Kamada, A. Bartholomew, R. Fenn, S. Kamada 国際会議「Self-distributive system and quandle (co)homology theory in algebra and low-dimensional topology 2017 KIAS Research Station Busan」2017年, 招待講演

14 Virtual doodles and semiquandles, N. Kamada, A. Bartholomew, R. Fenn, S. Kamada, 国際会議「The 12th East Asian School of Knots and Related Topics」 2017年, 招待講演

15 Virtual doodles and a quandle type invariant, N. Kamada, A. Bartholomew, R. Fenn, S. Kamada, 国際会議「KNOTS IN WASHINGTON XLIII」 2016年, 招待講演

16 Virtual doodle について, 鎌田直子, 「拡大 KOOK セミナー 2016」 2016年

17 Checkerboard colorable virtual knot, N. Kamada, 国際会議「Asian Mathematical Conference 2016」2016年7月

18 Converting virtual knot diagrams to normal diagrams, N. Kamada, 国際会議「International Workshop on Low-dimensional Topology」 2016年5月, 招待講演

19 Converting a virtual link diagram to a normal one, N. Kamada, 国際会議「The 11th East Asian School of Knots and Related Topics」 2016年1月, 招待講演

20 Normal virtual link diagrams and double covers of twisted link diagrams, N. Kamada, 国際会議「JMM Joint Mathematics Meetings The Mathematical Association of America (MAA) and the American Mathematical Society (AMS)」 2016年1月, 招待講演

21 Normal virtual link diagrams and double covers of twisted link diagrams, N. Kamada, 国際会議「The 1st Pan Pacific International Conference on Topology and Applications」 2015年11月, 招待講演

22 Virtual knot diagrams and double covers of twisted knot diagrams, N. Kamada, 国際会議「TAPU Workshop 2015」 2015年9月, 招待講演

23 Twisted knot の不変量と double cover, 鎌田直子, 「拡大 KOOK セミナー 2015」 2015年8月

24 A generalization of the JKSS invariant to twisted knots, N. Kamada, 国際会議「Low Dimensional Topology and Its Relationships with Physics AMS/EMS/SPM Meetings」2015年6月, 招待講演

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名:

ローマ字氏名:

所属研究機関名:

部局名:

職名:

研究者番号(8桁):

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名: 石井敦

ローマ字氏名: ISHII, atsushi

研究協力者氏名: 鎌田聖一

ローマ字氏名: KAMADA, seiichi

研究協力者氏名: 金信泰造

ローマ字氏名: KANENOBU, taizo

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。