

令和 5 年 6 月 12 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2022

課題番号：15K04882

研究課題名(和文)無限生成の対象の研究(野性的空間の群論的研究)

研究課題名(英文)Infinitary generated objects(Algebraic topology of wild spaces)

研究代表者

江田 勝哉(Eda, Katsuya)

早稲田大学・理工学術院・名誉教授

研究者番号：90015826

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：1. Cotorsionfree 群は整数群の可算直積群を使い定義されるが、その非可換版である Hawaiian earring group を使い定義する。主なる結果として、Abel群については通常の場合と一致する。つまり、Cotorsionfree 群の非可換版である。2. 局所compact位相群の上にoverlay が与えられている場合、そのtotal space に群構造が導入され overlay map は位相準同型写像となる。3. 1次元Peano空間のwild part が非自明 0-次元であれば、wild part の同相性と空間の Homotopy 同値性が同値となる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数的トポロジーの対象は従来、局所的により空間に関するものであった、そのため非可算濃度をもつ群あるいはその性質が問題となることはなかった。研究代表者は1990年ころから野性的空間の基本群、特異ホモロジーの研究を始めた。今回の7年に渡る研究は、その大きな区切りであり、今後の Wild Algebraic Topology といわれる分野の確立である。これは、Infinite Abelian group でなされた非可算群の理論の新しい応用であり、またこれまでではほなされていなかった非可換非可算群の研究とも考えられる。J. Brazas のホームページ Wild Topology に詳しい。

研究成果の概要(英文)：1. Cortorsionfree abelian groups are defined by the countable direct product of integer group. As non-commutative version of this we define groups using the Hawaiian earring group. Then, for abelian groups this new notion coincides with the cotorsionfreeness. 2. If there exists an overlay over a locally compact group, then the total space becomes a topological group and the overlay map becomes a topological homomorphism. 3. Suppose that the wild parts of one-dimensional Peano continua are non-empty and 0-dimensional. If the wild parts of the spaces are homeomorphic, then the spaces are homotopy equivalent. Conversely, if the spaces are homotopy equivalent, their wild parts are homeomorphic. Any one-dimensional Peano continuum X there exists a locally finite connected graph such that the space with its ends realizes X . Conversely the space of locally finite connected graph is a one-dimensional Peano continuum with 0-dimensional wild part.

研究分野：Geometric Topology

キーワード：Fundamental groups wild algebraic topology one dimensional space infinitary words singular homology

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は1990年ころから野性的空間の基本群、そのアーベル化である特異ホモロジー群の研究を始めた。これは Algebraic Topology の研究対象が局所的に良い空間、たとえば多様体のようなものとするものとは全く反対のことである。2000年前後に1次元 Peano 空間の基本群に関して、基本的な性質を証明した。その結果を使い、2010年に1次元 Peano 空間の基本群がホモトピー型を決定するというこの研究方向のある意味の最終的結果を得た。あひかし、それは局所的な性質によらず Algebraic Topology を展開できる色々な可能性を開いている。これを研究するというのが当初の研究環境であった。

2. 研究の目的

1で述べた背景のもとに、自然な形で現れる空間の基本群、特異ホモロジー群そして高次元ホモトピー群の群構造を決定すること、そしてその性質が研究の目的である。ここに現れる群は非可換あるいは可換の非可算群である。可換の場合非可算群については Abelian group theory において既に研究されているが非可換の場合そのような研究がない。そのため非可換非可算群を代数的に研究する必要がある、それ自体も目的になる。

3. 研究の方法

群論的性質は基本的に自由群の研究が基本となる。しかし、局所的な複雑さは自由群の生成元を増やすことだけでは十分でない。そこで、基本群の代わりに Hawaiian earring group はその非可算化を使う。それには従来の有限の長さの語の代わりに可算無限の長さの語に関する理論を展開すること、あるいは一次元空間の path に関する理論を展開することにより、局所的に複雑さを持つ空間の研究が可能となる。

4. 研究成果

以下各々の論文の内容を説明する。

K. Eda, Singular homology groups of one-dimensional Peano continua, Fund. Math. 232 (2016), 99-115.

この論文の主要部分は、この研究計画の前に得られていたものであったが、その細かい部分あるいはこの計画実施期間中に得られているので全体を説明する。一次元 Peano 空間の一次 singular homology 群は有限生成自由群であるか Hawaiian earring の singular homology group と同型になる。

K. Eda and H. Fischer,

Non-abelian cotorsionfree groups from a topological viewpoint,

Topology Appl. 214 (2016), 21-26.

Cotorsionfree 群は可換群であり整数群 \mathbb{Z} の可算積からの準同型によって定義される。ここでは、この概念を非可換化し、整数群 \mathbb{Z} の可算積のかわりに Hawaiian earring group からの準同型を使って定義する、このような群の重要な例は Archipelago group などである。主定理は、可換群がこの性質を満たすことは cotorsionfree であることと同値である。

K. Eda and V. Matijevic,

Existence and uniqueness of group structures on covering spaces

over groups, Fund. Math. 238 (2017), 241-267.

位相群上の被覆写像が位相準同形写像となれば、その写像は overlay である。またコンパクト群であるソレノイド群の上には overlay でない被覆写像があることが V. Matijevic との共著論文でわかっていた。主定理は「局所コンパクト群上の overlay は位相準同型となる」である。

K. Eda, From uncountable abelian groups to uncountable non-abelian groups,

Rend. Sem. Math. Univ. Padova 144 (2020), 105-114.

非可算可換群の美しい結果を端緒とする一次元空間の Algebraic Topology 及び非可算非可換群に関する研究代表者の研究の歴史。

K. Eda, Making spaces wild (simply connected case), Topo. Appl. 288 (2021) 107483.

局所単連結単連結可分距離空間 X に可算個の半径が0に収束する円周をつけてできる空間を $e(X)$ とする。このとき、 $e(X)$ の基本群から Conner-Eda による群から空間を構成すると同様の空間 X と同相となる。

K. Eda, One-dimensional Peano continua with 0-dimensional wild part, Fund. Math.

259 (2022), 243-253.

1次元 Peano 空間 X の wild part $w(X)$ が空でない場合、 $w(X)$ の同相性は空間 X のホモトピー同値性と一致する。1次元 Peano 空間 X は $w(X)$ が0次元であれば locally connected な connected

graph の end つき空間と同相になり逆に wild part が 0 次元である 1 次元 Peano 空間は locally connected な connected graph の end つき空間と同相になる、これらにより locally connected な connected graph の end つき空間の基本群、特異ホモロジー群の問題はすべて解決された。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Katsuya Eda	4. 巻 -
2. 論文標題 One dimensional Peano continua with 0-dimensional wild partpart	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Fund. Math.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Katsuya Eda	4. 巻 288
2. 論文標題 Making spaces wild	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Topology and its applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2020.107483	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Katsuya Eda	4. 巻 144
2. 論文標題 From uncountable abelian groups to uncountable non-abelian groups	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Rend. Sem. Mate. Univ. Padova	6. 最初と最後の頁 105-114
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Katsuya Eda	4. 巻 288
2. 論文標題 Making spaces wild	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Topology and its applications	6. 最初と最後の頁 electronically
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Katsuya Eda	4. 巻 23
2. 論文標題 Singular homology of one-dimensional Peano continua	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Fundamenta Mathematicae	6. 最初と最後の頁 99-115
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4604/fm232-2-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件 (うち招待講演 3件 / うち国際学会 3件)

1. 発表者名 江田勝哉
2. 発表標題 End付局所有有限グラフの基本群
3. 学会等名 一般位相幾何学とその関連分野の進展
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Katsuya Eda
2. 発表標題 The Specker theorem and non-commutative duality
3. 学会等名 Arches Topology Conference (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Katsuya Eda
2. 発表標題 Future of one-dimensional wild algebraic topology
3. 学会等名 2nd Pan Pacific International conference of Topology and its applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Katsuya Eda
2. 発表標題 Compactifications of graphs and fundamental groups
3. 学会等名 集合論的、幾何学的トポロジーとその応用
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Katsuya Eda
2. 発表標題 Algebraic topology of one dimensional spaces
3. 学会等名 1st pan pacific international conference on Topology and its application (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関