

令和 2 年 9 月 10 日現在

機関番号：34310

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04883

研究課題名(和文) ゲージ群のトポロジーの研究

研究課題名(英文) Study of the topology of gauge groups

研究代表者

河野 明 (KONO, AKIRA)

同志社大学・理工学部・教授

研究者番号：00093237

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：Gを位相群としPを空間X上の主G束とする。Pのゲージ群とはPの自己同型写像全体のなす位相群のことをいう。Pのゲージ群の分類空間は写像空間 $\text{map}(X, BG)$ の連結成分でPの分類写像を含むものと自然にホモトピー同値になる。一方、Pのゲージ群はGの交換子から定まるSamelson積と深い関係がある。ゲージ群の研究は写像空間を群論のテクニックを用いて解析するものと言える。本課題ではSamelson積の解析を通してゲージ群のホモトピー型の分類を目標としており、本年度は4次元球面状の $Sp(n)$ 束のゲージ群のp局所ホモトピー型をK0理論を用いて分類した。この結果はすでにいくつかの研究で応用されている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ゲージ群のホモトピー論的研究は、写像空間やリー群のホモトピー論への応用も含めて、現在急速に成長する分野である。特に、リー群の積構造やそれに関する高次ホモトピー構造との関連を通じた研究は重要である。本研究課題に関して得られた結果は主に、非単連結リー群に関するゲージ群と $Sp(n)$ 束のゲージ群のホモトピー型の分類である。前者では岸本大祐氏(京都大学)との共同研究で得られた非単連結リー群の $\text{mod } p$ 分解が用いられ、後者ではSamelson積の計算においてK0理論が用いられている。これらの応用範囲は広く、今後も多くの研究で用いられると考えられる。

研究成果の概要(英文)：Let G be a topological group, and let P be a principal G bundle over a space X . The gauge group of P is, by definition, the topological group of all automorphisms of P . The classifying space of the gauge group of P is naturally homotopy equivalent to the connected component of the mapping space $\text{map}(X, BG)$ containing the classifying map of P . On the other hand, the gauge group of P is closely related with Samelson products in G , which are defined by the commutator map of G . Then the study of gauge groups is an analysis of mapping spaces by applying group theoretic techniques. Our research aims to classify homotopy types of gauge groups by analyzing Samelson products. In this year, we classified the p -local homotopy types of gauge groups of principal $Sp(n)$ -bundles over a 4-sphere by applying $K0$ -theory. This result has a strong impact so that it has already been applied in some work.

研究分野：幾何学

キーワード：ゲージ群 写像空間 リー群 Samelson積 K理論

1. 研究開始当初の背景

ゲージ群のトポロジーの研究は、4次元球面上の主 $SU(2)$ 束のゲージ群のホモトピー型を、写像空間を用いて分類するという河野明の結果 [4] から始まった。その後、M. Crabb [1] によるファイバーワイズ・ホモトピー論という手法の導入を経て、岸本大祐・河野明 [2] による写像空間の高次ホモトピー構造とファイバーワイズ高次ホモトピーの関係の解明へと至った。ここで得られたファイバーワイズ高次ホモトピーはゲージ群の研究のみならず、最近では位相的複雑さの基礎理論でも用いられる重要なものである。一方、ゲージ群とリー群の類似性に関する研究も盛んに行われており、例えば、リー群のホモトピー論的研究の基礎である $\text{mod } p$ 分解がゲージ群に対しても行われることが、岸本大祐・河野明・蔦谷充伸 [3] により示された。現在では幾何や物理などへの応用を含む幅広い視点からゲージ群のトポロジーは研究されている。しかし、ゲージ群のホモトピー型や (コ) ホモロジーを具体的に決定することは非常に困難であり、これまでは構造群が低ランクのときにのみ行われていた。

2. 研究の目的

構造群と底空間を固定することで、主束の族が与えられ、したがって、それに対応するゲージ群の族が与えられる。本研究では具体的に与えられたリー群を構造群としてもち、さらに、具体的に与えられた空間を底空間とするゲージ群の族におけるホモトピー型の分類を目的とする。ゲージ群の分類空間は低空間から構造群の分類空間への写像空間であり、可算 CW 複体がある位相群の分類空間のホモトピー群のホモトピー型を持つことから、ゲージ群の分類空間は一般の写像空間のモデルとなる。さらに、写像空間の評価ファイブレーションの連結写像のホモトピーファイバーがゲージ群であり、この連結写像が交換子写像から定まる Samelson 積、もしくはその高次版であることから、この研究はゲージ群というモデルを通して群論の手法を用いて写像空間のトポロジーを明らかにすることに他ならない。

3. 研究の方法

リー群 G の交換子写像が定める Samelson 積は G の積構造をホモトピー論的に解析する際に基本的かつ重要である。底空間がサスペンション、例えば、球面の場合、ゲージ群はある Samelson 積の随伴のホモトピーファイバーであることが知られており、したがって、その Samelson 積の位数の決定はゲージ群のホモトピー型の分類において最も重要である。したがって、本研究ではまずリー群の Samelson 積の計算方法を確立し、ゲージ群のホモトピー型の分類へと応用する。特に、 G が古典群の場合は K 理論を用いた障害理論による計算方法を確立する。

4. 研究成果

(1) 非単連結リー群に関するゲージ群のホモトピー型の分類

非単連結リー群を構造群とする主束のゲージ群の研究は、 $SO(3)$ の場合のみ行われていた。この研究は $SO(3)$ が 3次元実射影空間と同相であるという特殊な状況を利用したもので、その他の場合には応用できない手法によって研究されていた。

リー群のホモトピー論において基礎となるのは $\text{mod } p$ 分解と呼ばれる、 p 局所化のホモトピー分解である。単連結の場合は 70年代に得られており、さらに、非単連結の場合は岸本大祐・河野明により 2008年に得られている。本研究では、この分解を用いて非単連結リー群の Samelson 積を普遍被覆群の Samelson 積と関係づけることにより計算する手法を確立した。この手法を応用し、 $PU(3)$ と $P\text{Sp}(2) = SO(5)$ の場合にゲージ群のホモトピー型を分類した。この手法は他の非単連結リー群にも容易に応用できる。

(2) 4次元球面上の主 $Sp(n)$ 束のゲージ群のホモトピー型の分類

ゲージ群のホモトピー型の分類は構造群であるリー群のランクが低い場合が主に研究されてきた。その理由は、ランクが高くなると、Samelson 積の計算が非常に困難になるからである。ランクが高い場合を扱った唯一の仕事は S. Theriault による、ユニタリー群 $U(n)$ に付随したゲージ群の p 局所ホモトピー型の分類である。しかし、この手法は、奇素数 p で局所化した場合にのみ有効であり、例えば、 $Sp(n)$ などの場合には有効でない。そこで、本研究では KO 理論を用いて $Sp(n)$ をターゲットとするホモトピー集合や、その積構造を解析する手法を確立し、4次元球面上の主 $Sp(n)$ 束のゲージ群のホモトピー型に関する結果を得た。その一部は、W.A. Sutherland [5] による結果を改善するものである。高階数のリー群に関するゲージ群のホモトピー型の分類は、 $U(n)$ の場合の Theriault による結果が本結果しかなく、これらは全く異なる手法により得られている。

< 引用文献 >

M.C. Crabb, and W A Sutherland, Counting homotopy types of gauge groups, Proc. London Math. Soc. 81 (2000), 747–768.

D. Kishimoto and A. Kono, Splitting of gauge groups, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), no. 12, 6715–6731.

D. Kishimoto, A. Kono, and M. Tsutaya, Mod p decompositions of gauge groups, Algebr. Geom. Topol. 13 (2013), no. 3, 1757–1778.

A. Kono, A note on the homotopy type of certain gauge groups, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 117 (1991), 295–297.

W.A. Sutherland, Function spaces related to gauge groups, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 121 (1992), 185–190.

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 D.Kishimoto, A.Kono	4. 巻 19
2. 論文標題 On the homotopy type of $Sp(n)$ gauge groups	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 491-502
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.2140/agt.2019.19.491	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S.Hasui, D.Kishimoto, A.Kono, T.Sato	4. 巻 16
2. 論文標題 The homotopy types of $PU(3)$ -and $PSp(2)$ -gauge groups	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Algebraic & Geometric Topology	6. 最初と最後の頁 1813-1825
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計0件

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----