

令和元年5月10日現在

機関番号：37111

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04884

研究課題名(和文) ホモトピー集合とそのホモトピー不変部分集合族の研究

研究課題名(英文) A study on homotopy sets and families of homotopy invariant subsets

研究代表者

小田 信行 (ODA, Nobuyuki)

福岡大学・理学部・教授

研究者番号：80112283

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：コファイブレーションと自己親密数に関する定理とその双対の結果であるファイブレーションと自己親密数に関する定理を証明した。特別な性質をもつ空間に対して連続関数環のK群をコホモロジー群を用いて表した。サイクリック元を保存する写像のホモトピー集合とその双対の定理を証明した。コゴトリブ集合について特別な場合に短完全列の存在を証明した。空間の約積の自己ホモトピー同値写像類の群と空間の自己ホモトピー同値写像類の群と対称群の半直積との関係を与える定理を証明し、さらに、コホモロジー群の性質を用いて一般的に成り立つ定理を証明した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

自己親密数に関する結果は新しい結果であり、特に、コファイブレーションおよびファイブレーションと自己親密数に関する定理は今後の研究に有用である。連続関数環のK群に関する結果、サイクリック元を保存する写像のホモトピー集合とその双対の結果、コゴトリブ集合について特別な場合に短完全列が存在すること、空間の約積の自己ホモトピー同値写像類の群と空間の自己ホモトピー同値写像類の群と対称群の半直積との関係を与える定理は新しい研究の基礎となる結果であり、これらの分野の今後の研究に役立つ。

研究成果の概要(英文)：A theorem is proved on the relation between cofibrations and the self-closeness numbers, and its dual, that is, a theorem on the relation between fibrations and the self-closeness numbers. The K group of the ring of continuous functions for spaces with special conditions is presented by cohomology groups. A result is proved on the homotopy set of maps which preserve cyclic elements and its dual. A theorem is proved about the groups of the self homotopy equivalences of smash products of a space and the semi-direct products of the direct product of the groups of the self homotopy equivalences of the space and the symmetric groups, and moreover, some general results are proved making use of cohomology groups.

研究分野：数学

キーワード：幾何学 トポロジー

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

2 つの連続写像の間に直交関係を定義し、写像の直交関係を用いて一般化されたゴットリーブ群や一般化されたバラダラジャン集合が定義されることを小田は以前の研究で定式化した。連続写像によりホモトピー群の間に誘導される準同型写像はゴットリーブ群からゴットリーブ群への準同型写像となるかという問題を研究し、これに関連してホモトピー集合の部分集合族を定義してその性質を調べていた。この概念の双対の定義も可能であり、それらの研究を進めていたが、双対の概念はホモトピー群の代わりにコホモロジー群の部分集合族を定義するので非常に興味深いものであり、さらに CB 写像や写像空間についても研究を行っていた。

2. 研究の目的

基点付位相空間の間の基点付連続写像全体の集合には基点付ホモトピーという同値関係が定まる。この同値関係により得られる同値類の集合(ホモトピー集合)にはホモトピー不変な部分集合族が定義される。本研究では様々な方法でホモトピー不変な部分集合族の性質を詳しく調べ、そのホモトピー不変量への応用、二次結合の部分集合族における働き、ホップ不変量との関係、空間の分解に関する定理等を研究する。特に、自己ホモトピー同値写像類の群と密接に関係した不変量、ゴットリーブ群やバラダラジャン集合とその双対に関する基礎理論を発展させる。

3. 研究の方法

- (1) 一般化されたゴットリーブ群等のホモトピー不変量を研究する。
- (2) 種々のホモトピー不変量とホモトピー不変部分集合族の間の関係を研究する。
- (3) 関連分野へのホモトピー不変部分集合族の応用のための基礎となる研究を行う。
- (4) (コ)ファイバー列と一般化された(コ)ゴットリーブ群の関係を研究する。
- (5) 2次結合とホップ不変量と部分集合族の関係を研究する。
- (6) 写像空間の位相とホモトピー不変部分集合族の関係を調べる。
- (7) ホモトピー不変量の圏論的研究を行う。

4. 研究成果

(1) 小田・山口俊博の共同研究でファイブレーションと自己親密数に関する研究を行い、小田・山口の共著論文として出版した。この結果は、小田・山口の共著で以前出版したコファイブレーションと自己親密数に関する研究(論文)の双対の結果であるが、完全な双対の結果ではないことが解明できた。また、この結果は、講演で発表された。さらに、小田・山口で有限複体の自己ホモトピー同値写像と自己親密数に関する研究を行い、新しい結果を得て論文を作成中である。これらの結果は講演で発表された。

(2) 木原浩・小田の共同研究で有理カップ積が自明である空間の特徴付けを行い、アイレンベルグ・マクレーン空間の間の連続写像との関係を導いた。この結果を用いて、特別な性質をもつ空間に対して連続関数環の K 群をコホモロジー群により表した。この結果は、以前、木原・小田が懸垂空間に対して得ていた結果を懸垂空間でない空間に拡張したものである。この結果は、木原・小田の共著論文として出版した。

(3) ゴットリーブ群を用いて定式化されるサイクリック元を保存する写像のホモトピー集合とその双対の研究を行った。特に、一般化されたコゴットリーブ集合のもついくつかの新しい性質を証明した。コゴットリーブ集合については、特別な場合に短完全列の存在を証明した。この性質は、コゴットリーブ集合の代数的性質を研究する上で重要である。コゴットリーブ集合は群状空間から導かれる演算により群になるかどうかは現在まで証明されていないが、チョイ・キム・小田は、コゴットリーブ集合の代数的性質を研究する上で重要である短完全列の存在を証明した。また、様々な群作用をコゴットリーブ集合に定義することに成功した。これらの結果は、コサイクリック元を保存する写像の研究に応用されることも示された。この結果は、論文で発表された。

(4) 小田・山口俊博の共同研究で空間のホモトピー群の特別な性質について、コファイブレーションや胞体構造との関係に関するいくつかの定理が得られ、小田・山口の共著論文として出版した。この論文では、コファイブレーションを用いて自己ホモトピー同値写像の集合の性質を研究し、自己親密数に関する結果を得た。特に、ある条件の下で、空間に胞体を接着しても自己親密数は大きくならないことを証明することができた。また、自己親密数が変化しないような条件も得られた。

(5) 木原浩・丸山研一・小田の共同研究として、特別な空間の自己ホモトピー同値写像類の群について研究し、空間の約積の自己ホモトピー同値写像類の群と空間の自己ホモトピー同値写像類の群と対称群の半直積との関係を与える定理、及びコホモロジー群の性質を用いて一般的に成り立つ定理を含む結果を論文で発表した。その中で、球面や複素射影空間やアイレンベルグ・マクレーン空間に関する一般的な結果も得た。

(6) 木原浩・小田の研究により直積空間のホモロジー群とコホモロジー群を応用して直積空間の自己ホモトピー同値写像類の群の非自明性を決定した。高次ホワイトヘッド積を研究するためにポーターの定義した直積空間の部分空間列を用いて定義される空間の自己ホモトピー同値写像は今までほとんど研究されていないが、これらの空間の自己ホモトピー同値写像類の群の非自明性を証明した。

(7) 中岡史絵・小田の共同研究として、作用子をもつ集合の間に新しく連続関数を定義し、2種類の異なる閉包と内部を用いてその連続関数を特徴付けた。さらに、作用子をもつ集合において部分空間、コンパクト集合および連結集合の概念を導入し、それらの基本的な性質と連続関数との関係を解明した。これらの結果は通常の位相空間論における結果に対応する基本的な定理であり、中岡・小田の共著論文を作成中である。これらの結果は講演及びで発表された。

(8) 平嶋康昌・小田の共同研究で、ブラウン・ブース・ティロットソン積の中心について調べ、一般化された反射空間との関係を証明した。アドミッシブルという概念を導入することにより研究を進めた。平嶋・小田で弱ハウスドルフ空間の圏に関する論文作成を行い、ホモトピー論に便利な圏の構成に関する論文を作成中である。これらの結果は講演で発表された。特別な位相空間のクラスに対するブラウン・ブース・ティロットソン積の中心はさらに研究する必要があることが分かった。

(9) Marcum・小田の共同研究で、高次の戸田積を定式化した。箱積については、非決定因子とルターンの公式との関係に着目し研究し、新しい結果を得た。さらに、箱積に対して古典的なホップ不変量だけでなく、一般化されたホップ不変量に対する公式も証明することができた。さらに、懸垂写像や境界準同型写像に関しても新しい公式を証明できた。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 5 件)

N. Oda and T. Yamaguchi, Self-maps of spaces in fibrations, Homology, homotopy and applications 20 (2018), 289-313.

査読有 DOI: <http://dx.doi.org/10.4310/HHA.2018.v20.n2.a15>

H. Kihara and N. Oda, Rational cup product and Algebraic K_0 -groups of rings of continuous functions, Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society 61(3) (2018), 607-622.

査読有 <https://doi.org/10.1017/S0013091517000359>

H.-W. Choi, J.-R. Kim and N. Oda, The generalized CoGottlieb groups, related actions and exact sequences, J. Korean Math. Soc. 54 (2017), 1623--1639.

査読有 <https://doi.org/10.4134/JKMS.j160602>

N. Oda and T. Yamaguchi, Self-homotopy equivalences and cofibrations, Topology and its Applications, 228 (2017), 341-354.

査読有 <http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2017.06.012>

H. Kihara, K. Maruyama and N. Oda, The group of self-homotopy equivalences of the m -fold smash product of a space, Topology and its Applications, 217 (2017), 70-80.

査読有 <http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2016.12.002>

[学会発表](計 5 件)

山口俊博, 小田信行
On self-closeness numbers,
2019年1月13日, 福岡ホモトピー論セミナー, 於 福岡大学セミナーハウス

平嶋康昌, 小田信行,
コンヴィニエントな位相空間の圏について,
2018年11月2日, 2018年度ホモトピー論シンポジウム, 於 東京工業大学大岡山キャンパス.

小田信行, 山口俊博,
Self-closeness numbers of spaces in cofibrations and fibrations,
2018年8月18日, 第23回 位相空間論とその応用, 於 熊本高専八代校.

中岡史絵, 小田信行,
Characterizations of functions between sets with operations II,
2018年8月18日, 第23回 位相空間論とその応用, 於 熊本高専八代校.

中岡史絵, 小田信行,
Sets with operations,
2015年8月30日, 第20回 位相空間論とその応用, 於 熊本高専八代校.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

研究代表者氏名: 小田 信行

ローマ字氏名: (ODA, Nobuyuki)

所属研究機関名: 福岡大学

部局名: 理学部

職名: 教授

研究者番号(8桁): 80112283

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。