

平成 30 年 8 月 31 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04889

研究課題名(和文)作用素環への群・量子群作用の研究

研究課題名(英文)Study of group-quantum group actions on operator algebras

研究代表者

戸松 玲治 (Tomatsu, Reiji)

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：70447366

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では群や量子群の C^* 環やvon Neumann環への作用の研究を行った。自由積因子環について、Connesのタウ不変量についての予想を植田好道氏との共同研究によって解決した。III1型因子環からcoreと呼ばれるII型因子環ができるが、それはIII1型因子環に付随するIIIラムダ型因子環の離散的coreと同型であることに注意して、実数群の問題を1次元トーラス群の問題に置き換えることが要点である。また、連続群の接合積を取った場合、超積環の構造を元の環の超積から引き出すことを考え、同程度連続な部分を取ることで解決した。これによって超積環のタイプの決定に別証明を与えることができた。

研究成果の概要(英文)：I researched group or quantum group actions on C^* - or von Neumann algebras. For free product factors, Y. Ueda and I affirmatively solved a conjecture about Connes' tau invariant. Type III1 factor has the so called core factor of type II, and this is actually isomorphic to the discrete core of the associated type III-lambda factor. Then we reduced the problem on real group actions to that of one-dimensional torus group actions. Next, I considered the structure of ultraproduct von Neumann algebras of crossed product von Neumann algebras by continuous group actions, and I obtained a description of it by thinking of its equicontinuous part. This allows us to determine the type of an ultraproduct von Neumann algebra in a different way known so far.

研究分野：作用素環論

キーワード：フォンノイマン環 量子群

1. 研究開始当初の背景

作用素環論では、群や量子群の作用の研究が重要な研究課題の一つである。離散群が従順かつ、von Neumann 因子環も従順である場合は、Connes 以来多くの研究者によって分類が完成している。私はそれまで Kac 型離散量子群の作用や、実数群の作用を増田俊彦氏(九州大学)とともに研究し、強い外部性の条件を作用に課した場合の分類を行っていた。

また従順因子環とは異なる性質をもつ自由積因子環に対して、本研究以前に沢山研究がされ、特に基本的な不変量がいくつか導入されていた。私は植田好道氏(名古屋大学)と共同で Connes の tau 不変量と呼ばれるものを研究し、自由積因子環の場合に tau 不変量が自明であれば連続接合積因子環が full になることを示していた。これを自由積とは限らない因子環について一般的な設定で研究したいと考えていた。

2. 研究の目的

- (1) 実数群の外部作用の研究。弱い外部性をもつ作用について研究。
- (2) 性質(T)を持つ von Neumann 環の研究。性質(T)を完全正值作用素の収束を用いて定式化すること。
- (3) $SU_q(2)$ の新しい作用の構成を考える。リンク代数を使ってできる環への作用の固定点環の記述すること。
- (4) 超積 von Neumann 環の接合積の研究。群作用からできる接合積の超積を記述すること。

3. 研究の方法

(1) について。

まず、従順 II_1 型因子環 M に実数群作用があったとし、各点において外部的であったとする。そして Connes スペクトルが実数群であったとする。さらに接合積環 N が因子環であったとする。もとの環 M の N の中での相対可換子環 R へ、双対作用を通して実数群の新しい作用が定まる。容易にこれはエルゴード的であることが分かる。これが点スペクトルをもつことを示すことを考えたいところだが、これは技術的に非常に難しい。

そこでまず M と R で生成される von Neumann 部分環 Q を考えてみると、竹崎--中神の結果により、実数群の閉部分群 G が存在して、 Q は M の G 接合積と同型である。 G が 1 元群である場合は考えることはもはやない。離散群である場合は、 R 上に双対作用が点スペクトルをもつ。この場合を注意深く解析すると元の作用に内部的な時刻があることが言える

が、各点外部性に反するからありえない。よって G が実数群の場合を考える、つまり $Q=N$ であるときに考える。もし R への双対作用が可積分であれば、一般論から終わる為、可積分でないケースを考えることになる。

M はスペクトル 0 の部分環である一方、 M と R で生成された環 Q には点スペクトルが存在するため、 R の元の列で点スペクトルを殆ど実現するようなものを取れるはずである。これについてはいくつか都合のよい仮定をつけると上手くいくのだが、一般的にはいまだ解決できていない。

(2) について。

Von Neumann 環 M には様々な局所凸位相が入るが、小澤登高氏(京都大学)の提案するマイルド位相を用いて性質(T)を導入することを考える。マイルド位相はシグマ弱位相よりつよくシグマ強スター位相よりも弱い位相である。これを用いて、性質(T)を「単位的完全正值写像のネットが恒等写像に各点マイルドに収束していれば、単位球上一様マイルドに収束する」として導入する。この定義はこれまで知られていた有限型の場合のものに一致すること、I 型因子環 $B(H)$ が性質(T)を持つことなどを導く。

私は III 型因子環の場合に研究し、III ラムダ型と呼ばれる因子環が性質(T)を持つことと、その II 型の離散コアが性質(T)をもつことが同値であることを示した。

従って II_1 型因子環 N で性質(T)をもつものであって、von Neumann の基本群 $F(N)$ が非自明なものを発見すれば III 型因子環で性質(T)をもつものを構成できるが、実際には性質(T)と非自明な基本群をもつ II_1 型因子環の例が現在に至っても構成されていない重要未解決問題である為、理論はできているが、具体例が構成できていない状況にある。

(3) について。

$SU_q(2)$ や他の q 変形量子群 von Neumann 環への作用の具体例はあまり知られていない。とくに極小作用とよばれる作用の構成問題は 30 年近く未解決のままである。コンパクト群の場合は、ユニタリ表現からできる無限テンソル積を考えれば極小作用を簡単に構成できるが、コンパクト量子群の場合は同様の方法で無限テンソル積作用を考えたとしても、もはやそれは極小ではない。極小性は、固定点環 M の全体環 M の中での相対可換子環が自明であることを意味するが、私の印象として大概の場合はこの相対可換子環は非可換環かつエルゴード作用をもつ空間となる。無限テンソル積の場合には、泉正己氏(京都大学)によって導入された非可換ポワソン境界で記

述される。

私は非自明な作用として次のようなものを考えた。まず $SU_q(2)$ とモノイダル同値となる自由直交量子群 $0+(F)$ を考える。モノイダル同値というのは、量子群の表現圏が C^* テンソル圏として同値ということの意味する。このとき $SU_q(2)$ と $0+(F)$ の両方のエルゴード作用をもつリンク代数と呼ばれる環を ind 構成できる。そこで $0+(F)$ の行列 F のサイズが 3 以上でありかつ、ブロック対角である場合に、その部分量子群として $\text{Sup}(2)$ が現れることを利用して、先ほどのエルゴード作用を $\text{Sup}(2)$ へ制限すれば非自明な作用が現れる。明らかにこれはエルゴード作用ではない。

私はこれの固定点環とその相対可換子環を研究した。

(4) について。

Full な因子環への離散群の作用については, Marrakchi 氏により十分に研究された。私は引き続き超積環の研究を行うこととした。

超積 von Neumann 環には、連続に作用が持ち上がらないため同程度連続な部分を取り出して考察する必要が生じる。始めに与えられた環を M , 局所コンパクト可換群の作用を G としてできる接合積を N とおく。 N の超積のうち、双対作用で同程度連続な部分を接合積で書くことを目的とする。

4. 研究成果

(1) については未だ解決できず、これからの研究の進展を待ちたい。

(2) について。主定理は次のものである。

定理: M を III 型因子環とし, N を離散コアとする。このとき M が性質(T)をもつことと, N が性質(T)をもつことは同値である。

したがって性質(T)をもつ III 型因子環で基本群が非自明なものを発見できれば、性質(T)をもつ III 型因子環を構成できる。

(3) について。主定理は次のものである。

定理: 上記のごとく $\text{Sup}(2)$ の作用を構成すると、固定点環の相対可換子環は Podles 球面と同型。

よってこの場合もやはり等質空間が現れることになる。

(4) について。 M に局所コンパクト可換群 G の作用があったとする。その接合積を N と書く。すると M の超積環の中で G 作用で同程度連続な環に G が作用し、その接合積 R を考える。次に N の超積を考えて、 G

の双対作用で同程度連続な環を Q とする。

定理: R と Q には自然な同型写像がある。

これを利用して、超積因子環のタイプを Ando-Haagerup の方法とは異なる証明で決定できる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

- (1) R. Tomatsu,
Ultraproducts of crossed product von Neumann algebras,
Illinois Journal of Mathematics.
掲載確定。(巻数・頁数・発行年未定)
(査読有り)
- (2) R. Okayasu, N. Ozawa, R. Tomatsu
Haagerup approximation property via Bimodules,
Math. Scand 121 (2017) no.1, 75—91.
(査読有り)
- (3) R. Tomatsu, Y. Ueda,
A characterization of fullness of continuous cores of type III free product factors,
Kyoto J. Math 56 (2016), no.3,
599—610. (査読有り)

[学会発表](計7件)

発表者: 戸松玲治

発表標題:

「Continuous crossed product Decomposition of ultra product von Neumann algebras」
日本数学会 2017 年度年会,
首都大学東京, 2017 年 3 月 26 日。

発表者: 戸松玲治

発表標題:

「Continuous crossed product Decomposition of ultra product von Neumann algebras」
Non-Commutative Analysis,
Institute of Mathematical Sciences,
Chennai, 2017 年 2 月 5 日。

発表者: 戸松玲治

発表標題:

「Haagerup property for von Neumann algebras」
PRCM 2016, Seoul National

University, 2016年7月1日

発表者：戸松玲治

発表標題：

「Fullness of free product factors」
GPOTS 2016, University of Illinois
At Urbana-Champaign,
2016年5月27日

発表者：戸松玲治

発表標題：同上

Analysis Seminar, Seoul National
University, 2015年9月25日

発表者：戸松玲治

発表標題：

「Fullness of free product factors」
日本数学会秋季総合分科会, 京都産業大学,
2015年9月15日

発表者：戸松玲治

発表標題：

「Haagerup property for von Neumann
algebras」
日本数学会秋季総合分科会, 京都産業大学,
2015年9月15日

〔その他〕

<http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~tomatsu/index.html>

6. 研究組織

研究代表者

戸松 玲治 (TOMATSU, Reiji)

北海道大学・理学研究院・准教授

研究者番号：70447366