

令和 2 年 6 月 5 日現在

機関番号：17401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04903

研究課題名(和文) グラスマン多様体上の 超幾何関数, q-超幾何関数と非線形特殊関数の研究

研究課題名(英文) Study of hypergeometric functions on the Grassmannian, q-hypergeometric functions and nonlinear special functions

研究代表者

木村 弘信 (Kimura, Hironobu)

熊本大学・大学院先端科学研究部(理)・教授

研究者番号：40161575

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：グラスマン多様体上の一般超幾何関数，行列積分型超幾何関数やモノドロミー保存変形によって得られる一般Schlesinger系など特殊関数や可積分系を，Twistor理論，Random行列理論などの視点から統一的に調べた．(1)一般化された準古典直交多項式のクラスを設定し，一般Schlesinger系と呼ばれる非線形微分方程式系との関係をツイスター理論を用いて与えた．(2)グラスマン多様体 $G(2,4)$ 上の超幾何関数であるガウス，クンマー，ベッセル，エルミート，エアリ関数を，エルミート行列空間上の積分で一般化して得られる関数を考察し，準古典直交多項式系，量子Painleve系との関連を与えた．

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は，特殊関数に関連する様々な結果を，できるだけ単純な原理から統一的に理解しようとするものである．特殊関数論はともすれば様々な公式の集積となってしまうがちであり，特殊関数個々の性質が統一的な視点がなく調べられる傾向がなきにしもあらずである．これらの性質が成り立つ根拠を明確にし，統一的な視点を導入することにより，専門家以外にもアプローチしやすくなり，他の科学分野との関連の発見や知見の深化に寄与することになるとと思われる．

研究成果の概要(英文)：The purpose of this research is to study the special functions and the integrable systems, such as the general hypergeometric functions(HGF) on the Grassmannian, the HGFs defined by matrix integral, and the general Schlesinger system, from the unified point of view using Twistor theory, Random matrix. We obtained the following results. (1) We study the relations between a class of semi-classical orthogonal polynomials, related with the general HGF, and a class of the general Schlesinger systems using Twistor theory. (2) We considered a matrix integral version of the Gauss hypergeometric, Kummer's confluent hypergeometric, Bessel, Hermite-Weber and Airy. We found the relation of them to the theory of semi-classical orthogonal polynomials and to quantum Painleve equations. We also presented a conjecture for the systems of partial differential equations characterizing the functions defined by matrix integrals and showed the conjecture is true for some particular cases.

研究分野：解析学

キーワード：超幾何関数 行列積分 holonomic系 量子Painleve系

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

## 1. 研究開始当初の背景

(1) 1986年に Gelfand によって導入された Grassmann 多様体  $G(r, N)$  上の超幾何関数は、Gauss の超幾何関数の Euler 積分表示を、 $GL_4(\mathbb{C})$  の対角行列からなる Cartan subgroup の普遍被覆群の指標の Radon 変換と理解することによって得られた。申請者は、これを Gauss の超幾何関数だけでなく、その合流型超幾何関数である Kummer, Bessel, Hermite-Weber, Airy 関数を簡単な場合として含む、一般超幾何関数(HGF)を導入した。それは、 $GL_N(\mathbb{C})$  の正則元の中心化群として得られ、 $N$  の分割により指定される極大可換部分群  $H$  の普遍被覆群を考え、その指標の Radon 変換として定義される。たとえば Gauss を含む上記の関数は、それぞれ  $1+1+1+1, 2+1+1, 2+2, 3+1, 4$  に対応する  $G(2, 4)$  上の一般超幾何関数と把握される。このような視点に立つことによって、古典的なアプローチでは不可能だったことが単純な形で幾何学的群論的に理解できる。たとえば微分方程式系の統一的な記述、方程式の対称性の統一的な記述、合流操作の群論的、幾何学的理解が可能になった。

(2) Mason-Woodhouse は Painleve 方程式と同等な Schlesinger 系を次のように導出した。複素時空  $C^4 = G(2, 4)$  上の  $SL_2(\mathbb{C})$  を gauge 群とする反自己双対 Yang-Mills 接続を考え、特に  $H$  の  $G(2, 4)$  への作用で不変な接続を求めると、Painleve 方程式(退化した系も含む)が得られることを示した。さらに Woodhouse 達は、反自己双対 Yang-Mills 接続を Grassmann 多様体  $G(2, N)$  上に一般化した接続を扱い、一般化された Schlesinger 系を導く monodromy 保存変形が得られることを示唆した。申請者は  $N$  の一般の分割の場合の monodromy 保存変形の具体的な記述を得、 $G(2, N)$  上で定義された非線形系としての一般 Schlesinger 系(GSS)を与えた。一旦、具体的な記述ができてみると、一般超幾何関数の理論との類似性が明らかになり、Weyl 群対称性や合流の process の構成がほとんど一般超幾何関数の場合と同様にできることを確信するに至った。

(3) 1992年に Kontsevich は 2次元重力に関する Witten 予想を行列積分で与えられる Airy 関数と関連づけて解いた。多変量解析において、行列積分で与えられる Gauss の超幾何関数が重要な役割を果たしていた。

(3) 1992年に Kontsevich は 2次元重力に関する Witten 予想を行列積分で与えられる Airy 関数と関連づけて解いた。多変量解析において、行列積分で与えられる Gauss の超幾何関数が重要な役割を果たしていた。

## 2. 研究の目的

当初の目的は、

(1) Grassmann 多様体上の一般超幾何関数と、monodromy 保存変形によって得られる一般 Schlesinger 系を、Twistor 理論の視点から統一的に詳しく調べること。(2) semi-classical orthogonal polynomial の理論と一般 Schlesinger 系との関係を確立すること。(3)  $q$ -超幾何関数として知られている様々な関数を、量子 Grassmann 多様体上の関数として理解する統一的な視点を与えることであった。

しかし、上記の Kontsevich 積分に興味を持ち、研究の目的を行列積分で表される特殊関数の研究を行うことも視野に入れて研究を行うことに途中から変更した。

## 3. 研究の方法

(1) 準古典直交多項式と GSS の関連の研究を行う。twistor 理論における Ward Ansatz の方法を用いて、一般超幾何の被積分関数を重み関数による moment を成分とする Hankel 行列式を用いて GSS の解を具体的に表示する。

(2) 行列積分で与えられる超幾何関数の一族を定義し、これらの関数を特徴付ける holonomic 系を構成し、その解空間の次元や特異性の研究を行う。

## 4. 研究成果

(1) 準古典直交多項式と一般 Schlesinger 系と呼ばれる非線形微分方程式系(GSS と記す)の間の関係を明確にすることを研究し、Woodhouse と Shah の Ward Ansatz 解の構成についての計算をさらに深めることによって、HGF の積分表示の被積分関数  $w$  を weight とする準古典直交多項式を考察し、この直交多項式理論において重要な moment を成分とする Hankel 行列式を用いて GSS の解を具体的に表示することを行った。Hankel 行列式と、GSS に対するモノロミー保存変形において現れる  $\tau$  関数との関係は明確にはできなかった。

(2) Twistor 理論の立場からの monodromy 保存変形によって得られる一般 Schlesinger 系に関し、一般超幾何関数において確立していた方法を用いてその合流について Twistor 理論を用いた記述に関する結果を論文として発表した。

(3) Grassmann 多様体  $G(2, N)$  上の一般化された超幾何関数のうち、 $G(2, 4)$  の場合に現れるものは、本質的に Gauss, Kummer, Bessel, Hermite-Weber, Airy 関数などの古典的超幾何関数である。Gauss の超幾何関数の正定値  $n$  次対称(エルミート)行列を変数とする関数への拡張は正定値対称(エルミート)行列空間上の積分としての Euler 積分表示の類似物を持つ。また

Kummer の合流超幾何関数や Bessel 関数とそれらの積分表示の類似物も多変量解析の分野で研究されている。それらの関数を変数行列の固有値の関数とみなしたものは、偏微分方程式系を満たすことが Muirhead によって知られており、その具体的な表示も与えられている。

① Hermite-Weber, Airy 関数についても行列積分版を考えて Hermite 行列空間での積分を独立変数行列の固有値  $x_1, x_2, \dots, x_n$  と積分変数行列の固有値の積分に Gauss の場合も含めて書き直した。

② これらの特異点の共通部分  $x_1=x_2=\dots=x_n$  に制限して得られる関数は、上記古典的超幾何関数の積分表示の被積分関数を weight とする準直交多項式に付随する moment を成分とする Hankel 行列式であることが分かった。これは monodromy 保存変形によって得られる Painleve 方程式という非線形方程式の特殊解を与える。

③ 行列積分版超幾何関数の被積分関数に積分変数行列の固有多項式  $|z-X|$  を掛けて積分して得られる関数は、 $z$  の多項式となる。これは共形場理論に関連して現れる量子 Painleve 系の多項式解であることが、Gauss の行列版の場合も含めて分かった。④ Hermite-Weber, Airy 関数の行列積分版について以下のことを行なった。満たすべき微分方程式系を予想し、方程式系を与える作用素たちのなすイデアルに対してグレブナー基底を求めた。また方程式系が holonomic 系で、その holonomic rank が  $2^n$  であることを示した。さらに  $n \times n$  行列積分で与えられる関数が、実際に予想した方程式系の解になっていることを  $n=1, 2, 3$  の場合に示した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 1件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Hironobu Kimura	4. 巻 0
2. 論文標題 Relation of Semi-Classical Orthogonal Polynomials to General Schlesinger systems via Twistor Theory	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 "Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations", Trends in Mathematics	6. 最初と最後の頁 399-414
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/978-3-319-52842-7_12	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hironobu Kimura and Damiran Tseveennamjil	4. 巻 46
2. 論文標題 Confluence of general Schlesinger systems and Twistor theory	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Hiroshima Mathematical Journal	6. 最初と最後の頁 289-309
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 3件 / うち国際学会 3件）

1. 発表者名 Hironobu Kimura
2. 発表標題 Some special functions of matrix integral type and quantum Painleve equations
3. 学会等名 International Symposium on Orthogonal Polynomials, Special Functions and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hironobu Kimura
2. 発表標題 On hypergeometric functions of matrix arguments
3. 学会等名 Formal and Analytic Solutions of Diff. Equations (FASdiff17) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hironobu Kimura
2. 発表標題 Orthogonal polynomials and General Schlesinger systems
3. 学会等名 Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	ダミラン ツェベーンナムジル (Damiran Tseveennamjil)	モンゴル生命科学大学・School of Economics and Business・講師	