3版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　 元 年　 ６ 月　 ６ 日現在

機関番号：３４４１９
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ０４９１１

研究課題名（和文）高階パンルヴェ方程式及びリジッド方程式の差分化

研究課題名（英文）Discretization of higher order Painleve system and rigid system

研究代表者
鈴木　貴雄（SUZUKI, Takao）

近畿大学・理工学部・准教授

研究者番号：６０５２７２０８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,600,000円

研究成果の概要（和文）：最近，パンルヴェ方程式の高階化の研究が微分と差分の両面から活発に行われているが，方程式がどれだけ存在するのかという分類問題や，どの超幾何函数がどのパンルヴェ方程式の特殊解として現れるかという問題については，まだ明らかにされていないことが多い．本研究では，クラスター代数の理論を利用して，ある可約な拡大アフィン・ワイル群の双有理表現を定式化することに成功した．この群の平行移動変換からは，既存の高階q-差分パンルヴェ方程式のうちq-超幾何函数を特殊解として含むものが導かれる．

研究成果の学術的意義や社会的意義
高階パンルヴェ方程式の分類問題は，2階の場合と比べて初期値空間の代数幾何が難しくなることもあって，未だ有効な手段が発見されていない．微分の場合にはKatz，原岡，大島らによって確立された分類理論が存在するが，差分の場合については未だ想像もつかない．本研究の結果は，この問題を解決するための一つのきっかけとなるかもしれない．また，クラスター代数との関連が明らかにされたことで，正準量子化や共形場理論の方面への更なる発展も期待出来る．

研究成果の概要（英文）：Recently higher order generalizations of the Painleve equations are proposed both on continuous side and on discrete side. However we haven't clarified yet a classification of equations or a relationship with hypergeometric functions. In this work we have formulated birational representations of a reducible extended affine Weyl group with the aid of cluster mutations. Translations of this group provide the known higher order q-Painleve equations containing the q-hypergeometric functions as particular solutions.

研究分野：可積分系

キーワード：パンルヴェ方程式　離散可積分系　リー代数　クラスター代数　ワイル群　超幾何函数

１．研究開始当初の背景

パンルヴェ方程式は，20 世紀初めに Painlevé-Gambier によって提唱された，2 階の有理的な常微分方程式で動く特異点は極のみである（パンルヴェ性を持つ）ものの総称である．その後，1970 年代の Wu-McCoy-Tracy-Barouch によるイジング模型の相関関数の研究を端緒として，パンルヴェ方程式がソリトン方程式に代表される無限次元可積分系に由来することが明らかにされた．一方で，パンルヴェ方程式はアフィン・ワイル群の対称性を持つ事が岡本によって示されており，パンルヴェ方程式の持つ数理構造にリー理論が深く関わっている事が明確になった．そしてそれを手掛かりに，Adler，野海・山田，笹野，津田，及び研究代表者などによって，様々な高階パンルヴェ方程式が発見された．

高階パンルヴェ方程式の研究と並行して，大島による超幾何函数のフックス型線形常微分方程式の視点からの再構築が行われた．Katz によるリジッド局所系の研究を出発点に，大島はカッツ・ムーディー・ワイル群のフックス型方程式への作用を調べることで，リジッドな（局所データのみで決定する）及び非リジッドな（アクセサリー・パラメーターを含む）フックス型方程式の代数的変換操作による分類に成功した．非リジッドな場合はモノドロミー保存変形が重要となり，そこから R.Fuchs のパンルヴェ VI 型方程式についての古典的な結果を含むような高階化が現れるので，これと既知の高階パンルヴェ方程式との関係を明らかにしたいというのは自然な動機であろう．この問題は 4 階，及び 6 階の方程式については坂井，及び研究代表者により詳しく調べられ，リー理論及びモノドロミー理論と高階パンルヴェ方程式との関係はかなり明確なものとなった．申請者は更に，4 階以下の全てのリジッド方程式が高階パンルヴェ方程式の特殊解として現れる事を示した事で，高階パンルヴェ方程式と超幾何函数に対する新しい統一的な視点を提供した．

2 階パンルヴェ方程式の差分化，すなわちパンルヴェ性に似た性質（特異点閉じ込め）を持ち連続極限でパンルヴェ方程式に帰着する差分方程式の発見は，1990 年代に主に q-差分を中心として活発に研究が行われ，それらの全ては 2001 年に坂井によって提唱された楕円差分パンルヴェ方程式から退化極限によって得られることが明らかにされた．同様の事は高階パンルヴェ方程式の場合にも期待され，差分化についての研究が梶原・野海・山田，津田，増田，及び研究代表者などによって活発に行われていたが，2 階の場合のような統一的な理解は出来ていなかった．また大島によるフックス型方程式研究の差分化についても，坂井・山口による q-差分化の研究などが存在したが，既存の q-超幾何函数や Spiridonov らによって提唱された楕円超幾何函数などとの関連については将来の課題であった．

２．研究の目的

上記の背景を基に，高階パンルヴェ方程式の q-差分化及び楕円差分化をリー理論及びモノドロミー理論を用いて系統的に行う事で，微分・q-差分・楕円差分高階パンルヴェ方程式とその特殊解としての超幾何函数に対する統一的な理解を目指す．これが本研究の主目的である．具体的には次の目的を掲げていた．

① 研究代表者によって提唱されたドリンフェルト・ソコロフ階層（アフィン・リー代数によって特徴付けられる無限次元可積分系のあるクラスの総称）の相似簡約に由来する高階パンルヴェ方程式（以降 FST 系と記す）について，その楕円差分化を試みる。また，既に定式化されている q-差分化についても，その代数的構造について詳しく調べる．

② モノドロミー保存変形に由来する 6 階パンルヴェ方程式について，特殊解として現れるリジッド方程式も含めて，その q-差分化を試みる．

３．研究の方法

(1) 本研究の開始時点で定式化されていた q-FST 系は，可約であり発展方程式にもなっておらず，q-パンルヴェ方程式の高階化としては不十分なものであった．従って，q-FST 系のより適切な表記を与えることは本研究を推進する上で急務であった．q-FST 系は 2 階の場合に神保・坂井による q-パンルヴェ VI 型方程式と一致するが，両者の間には変数とパラメーターについての非自明な関係式が存在するので．これを拡張することで高階の場合に方程式を書き換えようと試みた．またそれと並行して，q-FST 系の解に付随するタウ函数とそれらの満たす双線型関係式の導出を試みた．その際には，梶原・野海・山田などによる先行研究を参考にした．楕円差分化については，2016 年に楕円差分ガルニエ系が Ormerod-Rains によって提唱されたことで，計画の修正を余儀なくされた．その結果として，下記(3)の研究を進めることになった．

(2) 自然数の分割(2,2,2)に対応する A 型ドリンフェルト・ソコロフ階層の相似簡約からは，Simpson の Even4 超幾何微分方程式を特殊解として含む 6 階パンルヴェ方程式が導出される．この研究代表者による既存の結果の q-差分化及び高階化を試みた．

(3) クラスター代数と q-パンルヴェ方程式の関係については，Hone-Inoue などによる先行研究が幾つか存在していた．2015 年に大久保は，8 個の頂点を持つ箙における変異と置換から q-パンルヴェ VI 型方程式を導出した．この箙の拡張を考えることで，q-FST 系及びそれに

付随するタウ関数の定式化を試みた．

４．研究成果

(1) q-FST 系に関する結果：

① 可約な非発展方程式であった q-FST 系を既約な発展方程式に書き直した．また，既存の q-FST 系へのワイル群の作用は足算型の公式であったため，ポワソン構造や量子群などとの関係が見えにくいものであったが，方程式を書き直したことにより掛算型の公式が併せて得られた．

② q-FST 系の解に付随するタウ函数を A 型ルート格子上において定式化し，それらの満たす広田・三輪型の双線形関係式を導出した．これにより，Heine の q-超幾何函数によって記述される q-FST 系の特殊解の Jacobi-Trudi 型行列式表示を得ることが出来た．

(2) ドリンフェルト・ソコロフ階層の相似簡約に関する結果：

① 3成分KP階層の(n,n,n)-周期簡約に相当するA型ドリンフェルト･ソコロフ階層について，その相似簡約を2変数6n-4階多項式ハミルトン系として記述するような正準座標系を与えることに成功した.また，このハミルトン系の特殊解として Simpson の Even4 超幾何微分方程式を含むリジッド方程式のあるクラスが現れることが，併せて明らかになった．

(3) クラスター代数に関する結果：

① Inoue-Lam-Pylyavskyy による先行研究に基づいて，4n+4 個の頂点を持つトーラス上の箙を不変に保つような変異と置換の合成を系統的に構成した．こうして得られた合成はクラスター係数についての双有理変換となるが，それらのなす群が $A_{2n+1}+A_1+A_1$ 型拡大アフィン・ワイル群と同型になることが明らかにされた．更に，この群の平行移動変換を具体的に書き下すことで，既知の 3 種類（q-FST 系，坂井による q-ガルニエ系，津田による q-UC 階層の相似簡約）を含む高階 q-パンルヴェ方程式のあるクラスを導出した．上記の 3 種類の方程式は，線形 q-差分方程式系の差分両立条件として提唱されていたが，今回の結果によりカッツ・ムーディー・ワイル群の平行移動としての解釈も与えられたことになる．

② ①で得られた結果を拡張して，$A_{mn-1}+A_{m-1}+A_{m-1}$ 型拡大アフィン・ワイル群の双有理表現を与えた．この結果は Kajiwara-Noumi-Yamada による $A_{m-1}+A_{n-1}$ 型の拡張となっている．m が 3 の場合の平行移動変換の 1 つが，上記(2)①で得られたハミルトン系の q-類似になっているはずだが，まだ証明は出来ていない．

③ q-FST 系の q-超幾何函数による特殊解の条件を，①で得られた結果を用いてクラスター係数における条件として書き直すことが出来た．この結果を②の結果と合うように拡張出来れば，様々な q-超幾何函数及びリジッド系の q-類似が箙における変異から系統的に得られるであろう．

④ 上記の研究の副産物として，坂井による 2 階 q-パンルヴェ方程式の退化構造が箙の頂点の合流操作によって得られることが明らかになった．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　3　件）

① T. Suzuki, A higher order Painlevé system in two variables and extensions of the Appell hypergeometric functions F_1, F_2 and F_3, Funkcial. Ekvac. 61 (2018) 81-107. 査読有.

② T. Suzuki, A reformulation of the generalized q-Painlevé VI system with $A_{2n+1}^{(1)}$ symmetry, J. Integrable Syst. 2 (2017). 査読有.

③ T. Suzuki, A q-analogue of the Drinfeld-Sokolov hierarchy of type A and q-Painlevé system, AMS Contemp. Math. 651 (2015) 25-38. 査読有.

〔学会発表〕（計　14　件）

① 鈴木貴雄，大久保直人, $A_{2n+1}^{(1)}$型 q-ドリンフェルト･ソコロフ階層の相似簡約と q-ガルニエ系: 日本数学会年会，東京工業大学, 2019 年 3 月 19 日.

② T. Suzuki, Cluster algebra and generalized q-Painlevé VI systems of type A: Conformal field theory, isomonodromy tau-functions and Painlevé equations, 2018, Kobe University, December 11, 2018.

③ T. Suzuki, Cluster algebra and generalized q-Painlevé VI systems of type A: Symmetries and Integrability of Difference Equations 13, Fukuoka, November 13, 2018.

④ 鈴木貴雄，自然数の分割(n+1,n+1,n+1)に対応する A 型ドリンフェルト･ソコロフ階層の相似簡約，日本数学会秋季総合分科会，岡山大学, 2018 年 9 月 24 日.

⑤ 鈴木貴雄，クラスター代数と高階 q-パンルヴェ系: RIMS 共同研究（公開型）「可積分系理論から見える数理構造とその応用」，京都大学数理解析研究所, 2018 年 9 月 7 日.

⑥ T. Suzuki, A higher order generalization of the Painlevé VI equation with W($A_{2n+1}^{(1)}$)

symmetry: Conformal field theory, isomonodromy tau-functions and Painlevé equations, Kobe University, December 1, 2017.

⑦ **鈴木貴雄**, **W($A_{2n+1}^{(1)}$)-対称性を持つ一般化 q-パンルヴェ VI 方程式に付随する双線型関係式: 日本数学会秋季総合分科会, 山形大学, 2017 年 9 月 11 日.**

⑧ **鈴木貴雄**, **A 型パンルヴェ系と超幾何函数: RIMS 共同研究（公開型）「可積分系の数理と応用」, 京都大学数理解析研究所, 2017 年 9 月 6 日.**

⑨ T. Suzuki, From Heine to q-Painlevé: The 25th International Conference on Integrable Systems and Quantum symmetries, Czech Technical University in Prague (Czech), June 7, 2017.

⑩ T. Suzuki, From Heine to q-Painlevé: Integrable Systems 2016, The University of Sydney (Australia), December 2, 2016.

⑪ **鈴木貴雄**, **q-パンルヴェ VI 方程式の q-超幾何函数の観点からの一般化: 非線形波動研究の深化と展開, 九州大学応用力学研究所, 2016 年 11 月 4 日.**

⑫ T. Suzuki, A generalization of the q-Painlevé VI equation from a viewpoint of a basic hypergeometric solution: Symmetries and Integrability of Difference equations 12, Sainte-Adéle (Canada), July 8, 2016.

⑬ **鈴木貴雄**, **q-超幾何函数 ${}_3\phi_2$ を解に持つ 4 階 q-パンルヴェ方程式: 日本数学会年会, 筑波大学, 2016 年 3 月 18 日.**

⑭ T. Suzuki, Higher order Painlevé systems, rigid systems and hypergeometric functiuons: Analytic Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations, The Mathematical Research and Conference Center (Poland), September 14, 2015.

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0　件）

〔その他〕
ホームページ等
https://researchmap.jp/suzukit/

６．研究組織

(1)研究分担者

(2)研究協力者
研究協力者氏名：大久保直人（青山学院大学）
ローマ字氏名：Naoto Okubo

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです．そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます．