2版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 ２０ 日現在

機関番号：３４４２８

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2017

課題番号：１５Ｋ０４９１２

研究課題名（和文）ランダム平面分割と量子トーラス対称性

研究課題名（英文）Melting crystal models and quantum torus symmetry

研究代表者

中津　了勇（Nakatsu, Toshio）

摂南大学・理工学部・教授

研究者番号：１０２８１５０２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,200,000円

研究成果の概要（和文）：ランダム平面分割は超対称ゲージ理論、グロモフ・ウィッテン理論、ミラー対称性との関連が見出され、数理物理の新たな研究対象になっている。ランダム平面分割の可積分構造と幾何構造について、量子トーラス対称性を用いて、その理解と応用を追及した。成果として、closed vertexの開弦振幅の厳密計算とその代数構造に関する研究を量子トーラス対称性を用いて進め、量子ミラー曲線がq-差分型Kac-Schwarz作用素として解釈できることを示した。また、位相的頂点を再現するランダム歪平面分割についての量子トーラスのシフト対称性を得た。それを用いて、ホッジ積分とランダム歪平面分割の関係を明らかにした。

研究成果の概要（英文）：Random plane partition or melting crystal model was a topic in the branch of combinatorics. However, it has been found surprising relations with other branches in modern mathematical physics, such as the Seiberg-Witten theory of supersymmetric gauge theories, the Gromov-Witten theory and the mirror symmetry of Calabi-Yau 3-folds. The model has been also studied from the integrable system viewpoint. We further elucidate integrable structure of melting crystal models, using quantum torus symmetry. All genus open string amplitudes on closed topological vertex are computed in a closed form, and thereby the underlying quantum curve is obtained. It turns out to be expressed as the q-difference operator which is a q-analogue of the Kac-Schwarz operator of random matrix or 2-dimensional quantum gravity. By giving a generalization of the shift symmetry of quantum torus, the relation between three-partition Hodge integral and random skew plane partition is derived.

研究分野：無限次元可積分系

キーワード：ランダム歪平面分割　位相的頂点の理論　量子トーラス代数　位相的開弦振幅　量子リーマン曲線　q-差分方程式　可積分階層

１．研究開始当初の背景

場の量子論は無限大自由度の協同現象を記述する枠組み・言語である。その豊かな内容の理解においては、数学的な議論が重要な意味を持ち、数理的考察により、物理学の深い理論が構成されてきた。同時に、場の量子論の経路積分を用いる発見的手法により、組み紐の不変量など重要な数学的結論も得られている。このような状況にあって、 厳密に解ける場の量子論に内在する可積分構造と対称性を深く理解することはきわめて重要である。今回の研究では、ゲージ理論の厳密解、ミラー対称性、グロモフ・ウィッテン不変量などに関連する数理物理の新たな研究対象であるランダム平面分割に焦点を当て、その可積分構造と対称性を深く理解することに迫る。

ランダム平面分割は、平面分割の確率モデルある。 比較的古くから組合せ論の研究対象であった。 非負整数の２次元的配列で、任意に１つの列もしくは段を固定するとき、そこに現れる１次元的配列が整数の「分割」(partition)となるものを、「平面分割」(plane partition)と呼ぶ。２次元的配列を対角線に平行な半直線に切り分けて、「分割」の列と見ることもできる。この確率モデルは、２つの不定元 q ($|q|< 1$), Q をパラメタとする平面分割の数え上げの母関数(MacMahon 関数)と関係する。

超対称ゲージ理論の厳密解、ミラー対称性、グロモフ・ウィッテン不変量との関連を手短にまとめておこう。不定元 q, Q をゲージ理論のパラメタで書き直せば、確率モデルの分配関数は５次元 U(1)理論のネクラソフ関数と等しい。すなわち、インスタントン(反自己双対接続)のモジュライ空間上のディラック作用素の同変指数となる。超弦理論においては、同様の操作で、局所 U(1)ジオメトリーと呼ばれる３次元の開カラビ・ヤオ多様体上の超弦の厳密振幅となる。グロモフ・ウィッテンのプレポテンシャルの量子化と呼ぶべきものである。

可積分系との繋がりも見出されている。中津・高崎によって、ランダム平面分割における可積分構造として、１次元戸田階層が得られている。主対角の分割に対して、新しく無限個の結合定数を許すポテンシャルを導入する。外部ポテンシャル中のランダム平面分割の分配関数は、１次元戸田階層のタウ関数を与える。無限個の結合定数が１次元戸田階層の時間変数である。この可積分性の鍵は、中津・高崎の見出したランダム平面分割における量子トーラス対称性にあった。外部ポテンシャルは、$UV = qVU$ を満たす U, V が生成する非可換２次元トーラスの Lie 代数 (量子トーラス Lie 代数)で特徴付けられる。

２．研究の目的

従来の可積分系研究で論じられてこなかった確率モデルを題材にして、その可積分構造を深く理解することにより、可積分系と数理物理の新たな関連を探ることである。具体的には、ゲージ理論の厳密解、 ミラー対称性、グロモフ・ウィッテン不変量などの数理物理の様々な局面において新たな研究対象となっているランダム平面分割に焦点を当てて、量子トーラス対称性や離散対称性など確率モデルの持つ対称性に着目することにより、一般化弦方程式とその帰結も含めた可積分構造の精密な理解に迫り、 関連する数理物理への可積分系の応用を追及することである。

この研究の方向は、研究代表者・分担者が過去数年間にわたり行ってきた研究をさらに発展させ、ランダム平面分割における可積分構造と対称性の精密な理解とその応用を追求することである。ランダム平面分割における可積分構造と対称性は、ゲージ理論や超弦理論の厳密解に現れる可積分構造と対称性でもある。この研究には、組合せ論の限定的な問題の定式化を超えて、インスタントンのモジュライ空間やカラビ・ヤオ多様体のミラー対称性への直接的な応用を持つ、という特徴がある。従来の可積分系研究で論じられてこなかったランダム平面分割を題材に、可積分系と数理物理の新たな関連を探ることは十分興味深いと思われる。具体的な目標の詳細を挙げよう。

(1) ランダム平面分割の分配関数は１次元戸田階層のタウ関数である。この特殊解を与える無限次元クリフォード群と量子トーラスの間に成り立つ関係式から、ビラゾロ/W-拘束条件に相当する一般化弦方程式が調べられている。開カラビ・ヤオ多様体のグロモフ・ウィッテン理論に応用可能な方法で系統的にランダム平面分割の分配関数を可積分階層の特殊解として決定する一般化弦方程式を求めること。

(2)ランダム歪平面分割(random skew plane partition)は位相的頂点の理論と深く関係する。その分配関数の可積分構造はよくわかっておらず、量子トーラス対称性や離散対称性を拡張することによって、ランダム歪平面分割における可積分構造とその特殊解を決定する一般化弦方程式を求めること。

(3) 平面分割を用いる量子トロイダル代数の表現論が構築されつつある。 量子トロイダル代数は２つのパラメータ(q, t)による変形 W 無限大代数である。量子トーラス Lie 代数はそのひとつの古典極限に相当する。 ランダム平面分割の視点から量子トロイダル代数の表現論を捉え直すこと。

３．研究の方法

研究課題の中心部分(1)-(3)は、研究代表者の中津が研究分担者の高崎金久教授(近畿大学理工学部)と、 過去の共同研究の延長として取り組んだ。過去 20 年以上にわたる研究協力の実績があり、弦理論、ゲージ理論、確率モデルの可積分構造に関する 11 編の共著論文がある。ランダム平面分割における可積分構造の精密な理解、一般化弦方程式の確定などを目指した。月に数回不定期に相手の研究室を訪れて、大まかな基礎を論じ合い、e-メール・電話で細部を討論した。武部尚志教授(モスクワ高等経済学校数学部)、村瀬元彦教授(カリフォルニア大学デービス校数学部)など海外研究者との情報交換を行った。

４．研究成果

ゲージ理論の厳密解、 ミラー対称性、グロモフ-ウィッテン不変量などの数理物理の様々な局面において新たな研究対象となっているランダム平面分割に焦点を当てて、量子トーラス対称性や離散対称性など確率モデルの持つ対称性に着目することにより、一般化弦方程式とその帰結も含めた可積分構造の精密な理解に迫り、関連する数理物理への可積分系の応用を追及した。

(1) ランダム平面分割における量子トーラス対称性を利用することにより、位相的頂点の方法で closed vertex の開弦振幅の厳密計算が可能であることを示した。Closed vertex は開いた 3 次元トーリック カラビ・ヤオ多様体のひとつで、その閉弦振幅(分配関数、グロモフ-ウィッテン不変量の母関数)は代数幾何学的な方法や位相的頂点の方法で求められている。さらに、closed vertex の開弦振幅の１変数母関数がある種のｑ-差分方程式を満たしていることを導いた。ｑ-差分方程式は q-差分演算子の非可換多項式を用いて与えられる。ダイクグラフたちの量子幾何学では、「非可換多項式の可換極限 = ミラー曲線」であると予想されており、この結果は予想に対する非自明なチェックを与える。また、１次元鎖に類似のウェッブ図形(トーリック図の双対図形)で決まる開いた 3 次元トーリック カラビ・ヤオ多様体(strip geometry)の開弦振幅について、その多変数母関数の可積分構造の研究も進めた。多変数母関数が金子たちの一般化された多変数 q-超幾何級数と深く関係していることなど一定の成果を得た。

(2) ランダム平面分割における量子トーラス対称性を利用することにより、closed vertex の厳密な開弦振幅の代数的構造に関する考察を進めた。ダイクグラフたちの量子幾何学における closed vertex の量子ミラー曲線が q-差分型 Kac-Schwarz 作用素として解釈できることを示した。 同様の解釈はコニフォルドをはじめとする strip geometry 上の位相的弦理論にもあてはまる。

(3) 位相的頂点を再現する非自明な境界条件を満たすランダム歪平面分割に対して有効になる量子トーラスのシフト対称性を拡張することを試みた。 過去数年間にわたるランダム平面分割と可積分階層との関わりの考察において基本的であった、量子トーラスのシフト対称性について、ほぼ満足できる一般化を与えることができた。 位相的頂点の巡回対称性の証明など、 一定の成果を挙げている。 位相的頂点にはまだ KP 階層や戸田階層で扱えない部分があり、一般化されたシフト対称性を精査することで、その可積分構造を探る重要な手がかりが得られると思われる。このことは現在、論文に纏めている。

(4) 位相的頂点をグロモフ-ウィッテン理論の立場から代数曲線のドリーニュ・マンフォード型のモジュライ空間上のホッジ類によるウィッテン-コンセッビッチ型のタウ関数の変形とみなすことができる。特に、『位相的頂点 = Three-partition Hodge integral (３つの整数分割でラベルされたホッジ積分の母関数)』という数学予想が、J. Li, C.C. Liu, K. Liu, J. Zhou によって立てられている(LLLZ 予想、2009)。ホッジ積分の母関数の複雑な表現論的表示をランダム歪平面分割の観点から整理し、一般化された量子トーラスのシフト対称性を用いることで、非自明な境界条件を満たすランダム平面分割の分配関数との関係を考察した。特に、LLLZ 予想の証明の道筋が得た。このことについて、現在、論文に纏めている。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計５件）

① <u>高崎金久</u>、<u>中津了勇</u>
“Open string amplitudes of closed topological vertex,”
J. Phys.A: Math.Theor.,査読有,Vol49, 2016, 025201.
doi:10.1088/1751-8113/49/2/025201

② <u>高崎金久</u>，<u>中津了勇</u>
“Closed vertex 上の位相的弦理論の開弦振幅,” 日本数学会 2015 年度秋季総合分科会 無限可積分系特別セッション講演アブストラクト 5-6 頁,査読無，2015 年９月.

③　高崎金久，中津了勇
“q-difference Kac-Schwarz operator in topological string theory,” SIGMA, 査読有, vol 13, 2017, 009. Contribution to the Special Issue on Combinatorics of Moduli Spaces: Integrability, Cohomology, Quantisation and Beyond.
doi:10.3842/SIGMA.2017.009

④　高崎金久，中津了勇
“Closed topological vertex の量子ミラー曲線とq-差分型Kac-Schwarz作用素,” 日本数学会 2016 年度総合分科会無限可積分系特別セッション講演アブストラクト 45-46 頁，査読無，2016 年 9 月.

⑤　高崎金久
“Quantum curve and 4D limit of melting crystal model,”arXiv:1704.02750 査読無，2017 年 4 月.

〔学会発表〕（計 10 件）

①　高崎金久，中津了勇
“Closed vertex 上の位相的弦理論の開弦振幅,” 日本数学会 2015 年度総合分科会，京都産業大学，2015/9/13 – 9/16

②　高崎金久
“Topological vertex and quantum mirror curves,”in International Symposium “RIKKYO Math. Phys. 2016,” 立教大学，2016/1/9 –1/11.

③　中津了勇
“Quasi-Hamiltonian spaces (after Alexeev, Malkin and Meinrenken),” in Koriyama Geometry and Physics Days 2016, “Painleve equations, integrable systems and moduli spaces,” 日本大学工学部, 2016/2/6 - 2/8.

④　高崎金久
“Integrable hierarchies in melting crystal models and topological vertex,'' at the KIAS Workshop on integrable systems and related topics, KIAS, ソウル, 韓国, 2016/6/21 – 6/24.

⑤　高崎金久
“Integrable hierarchies in melting crystal models and topological vertex,” in Infinite Analysis 16 Summer school “Integrable Hierarchies and Beyond,” 名古屋大学，2016/8/29 – 9/1.

⑥　高崎金久，中津了勇
“Closed topological vertex の量子ミラー曲線と q-差分型 Kac-Schwarz 作用素,”
日本数学会 2016 年度総合分科会，関西大学，2016/9/15 – 9/18.

⑦　中津了勇
“Quantum Torus and Topological Vertex,” in “Progress in Quantum Field Theory and String Theory II,”
大阪市立大学，2017/3/27 – 3/31.

⑧　中津了勇
“量子トーラス・位相バーテックス・2 次元位相重力理論,” 第 40 回 四国セミナー，香川大学， 2017/12/23 - 12/24.

⑨　中津了勇
“Topological vertex and Hodge integral,” in “7th Bankok workshop on high-energy theory,” チュラ-ロンコン大学，バンコク，タイ，2018/ 01/29 - 02/02.

⑩　中津了勇
“Hodge integral and topological vertex,” in “XXX Workshop Beyond the Standard Model,”物理学研究センター，バードホンネフ，ドイツ，2018/03/12 - 03/15.

６．研究組織

(1)研究代表者
中津　了勇（NAKATSU, toshio）
摂南大学・理工学部・教授
研究者番号：10281502

(2)研究分担者
高崎　金久（TAKASAKI, kanehisa）
近畿大学・理工学部・教授
研究者番号：40171433