

令和 2 年 6 月 12 日現在

機関番号：12103

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04918

研究課題名(和文)いくつかの手法に基づく加重付ノルム不等式の研究

研究課題名(英文)The weight theory under some recent innovations

研究代表者

田中 仁(Tanaka, Hitoshi)

筑波技術大学・障害者高等教育研究支援センター・講師

研究者番号：70422392

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、1995年、Nazarov, Treil, Volbergによって見出された「双線形埋蔵定理」の拡張を進めました。2015年、Wolffポテンシャルを用いることで「3重線形埋蔵定理」を得ました。2016年、Wolffポテンシャルを反復して用いることで、その多重化に成功し、「 $n$ 重線形埋蔵定理」を得ました。2019年、数田の補題を用いることで、2新直方体の新たな枠組みの下、開上双対領域において、 $n$ 重線形埋蔵定理を示しました。これとは別に、2018年、べき型の動径的荷重に対して、分数べき積分作用素の荷重付きMorreyノルム不等式が成立するための必要十分条件を与えました。

研究成果の学術的意義や社会的意義

作用素の評価を荷重(weight)付きというより一般化された設定の下で研究することは、基本的であり応用上も重要視されています。それは、作用素の値域に関する情報を陽的に与えるものであると解釈できて、作用素のより深い理解に繋がるものです。

本研究では、いくつかの作用素について、加重付ノルム不等式が成立するために荷重が満たすべき条件を明らかにし、その特徴づけを与えました。特に、 $n$ 重線形埋蔵低利の証明はこの方向の研究の最後の部分にあたり、一つの完成形を与えました。

研究成果の概要(英文)：In 1995, Nazarov, Treil and Volberg established the bilinear embedding theorem which is simple and quite interesting. In this research, we expect to consider the multi-linear version of this theorem. In 2015, using the single Wolff potential, we verified the trilinear embedding theorem. In 2016, applying the Wolff potential repeatedly, we succeeded to obtain multi-Wolff potential and proved  $n$ -linear embedding theorem. In 2019, using Yabuta's lemma, which can be proved by a clever iteration argument, we showed  $n$ -linear embedding theorem with respect to the dyadic rectangles (not the dyadic cubes). This concerns with strong maximal operators. Moreover, in 2018, we characterized weighted Morrey norm inequality for fractional integral operators with the power weights.

研究分野：解析学基礎

キーワード：fractional integrals maximal operator Morrey space  $n$ -linear embedding weight theory

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

(A) 1999年, Nazarov, Treil, Volberg は, 「双線形埋蔵定理」(bilinear embedding theorem) とよばれる単純な形を持つ荷重付双線形ノルム不等式の成立を特徴づける一つの定理を与えました. 彼らは制御理論にその源流を持つ Bellman 関数の手法を用い, 1次元かつ Hilbert 空間の場合を取り扱いました. 2009年, Lacey, Sawyer, Uriarte-Tuero は, この結果を  $d$ 次元かつ上双対領域とよばれる部分へ拡張しました. 彼らは2進立方体を用いた corona 分解の手法によっています. 2012年, Hytönen は, この上双対領域の結果に対する初等的な別証明を parallel corona 分解という手法により与えました. 2014年, 筆者は Parallel corona 分解と Wolff ポテンシャルを用いることで, さらに下双対領域にこれらの結果を拡張し, 完全なものとなりました.

Wolff は, 1999年に Bocher prize を受賞し, その後まもなく早逝した優れた数学者です. Wolff ポテンシャルは, 非線形ポテンシャルであり, 分数積分作用素(Riesz ポテンシャル)および測度に対して定義される「エネルギー」という基本量を, より広い汎用性を持って記述できることから, 現在偏微分方程式論等で基本的に用いられています. Cascante, Ortega, Verbitsky は, 2004年にこの Wolff ポテンシャルを用いることで, 分数積分作用素を離散化した正作用素に対する荷重の理論を展開しました.

(B) Morrey 空間は, 関数の局所的な regularity を Lebesgue 空間よりも定量的に精密に記述できる関数空間であり, 調和解析のみならず偏微分方程式論においても広く用いられている重要な関数空間です. Adams, Xiao は, 2012年にこの Morrey ノルムの新たな一つの定式化を与えました. それは, Muckenhoupt の荷重で, その Hausdorff content とよばれる量が1以下である荷重の族を導入し, 荷重付  $L^p$  ノルムの上限をその族について取ることにより与えられるものです. この新たな視点は, Muckenhoupt の荷重の理論をそのまま適用することで, Morrey 空間上の古典的作用素の有界性が直接系として従ってしまうのみならず, 既存の Morrey ノルムによっては取り出すことのできなかった関数の局所的な増大度・減少度を荷重を通して支配することができます. 実際, 筆者は, 2015年にこの新たな視点に立つことにより, べき型の動径的荷重に対して Hardy-Littlewood 最大関数の荷重付き Morrey ノルム不等式が成立するための必要十分条件を与えその完全な特徴付けに成功しました.

### 2. 研究の目的

作用素の評価を荷重(weight)付きというより一般化された設定の下で研究することは, 基本的であり応用上も重要視されています. それは, 作用素の値域に関する情報を陽的に与えるものであると解釈できて, 筆者の興味を中心をなすものです.

本研究は, いくつかの作用素について, 荷重付ノルム不等式が成立するために荷重が満たすべき条件を明らかにすることをその目的とします. 近年見出されたいくつかの新たな計算手法に注目して, それに基づきいくつかの作用素に対する荷重付ノルム不等式の開発・改善をその目的とします.

### 3. 研究の方法

実解析的手法による調和解析の分野において, 多重線形作用素の研究は現在世界的な一つの潮流となっています.

この多重線形化の流れを受け, 筆者はまず「3重線形埋蔵定理」(trilinear embedding theorem)の研究に着手しました.

当初, 比較的容易に上双対領域において定理の成立を確認することができました. しかし, 下双対領域での特徴づけには Wolff ポテンシャルの多重化を考察する必要があり, それは未知のまま残されました.

Wolff ポテンシャルは複雑な形を持ち, 美しいとは言にくいものです. しかし, 圧倒的に強力であって, 未知であった下双対領域での成立はこの Wolff ポテンシャルを反復して用いることから特徴づけられ, さらに, 一般の  $n$ 重線形埋蔵定理も同様の反復法から示すことができました.

これらすべての勝因は parallel corona 分解の適応にあると言えます. しかし, それは2進立方体の集合が持つ決定的な「入れ子構造」に強く依拠していて, その構造を持たない, 例えば条件付き期待値による filtration を設定し他確率論の枠組み等へ進むことは難しいとされていました.

その克服に向けて厳しく不毛な考察を進めて行く中, その「入れ子構造」を持っていない, 2新立方体の族に対する Carleson 型埋蔵定理を認識するに至りました.

この補題のオリジナルは明確ではありません. 関西学院大学の藪田幸三教授が証明付きで出版された論文の中で本質的に用いていました. 筆者は不幸にしてその証明の致命的な間違いに気づいてしまいました. それを先生に知らせ自信も証明に挑みました. 条件を少し強くすれば成立するようになっていました. しかし, 数か月後藪田先生からのメールで, この補題成立の確認を知らされました. それは, 巧妙な iteration の議論によるものです.

さらに, 心的熟成を進める中で,  $n$ 重線形埋蔵定理を2新立方体の新たな枠組みの下で開上双対領域においてこの補題を用いて示しうることに気づきました. 2進立方体の「入れ子構造の呪縛」を解くことができたのです.

#### 4. 研究成果

(A) 本研究では、1999年、Nazarov, Treil, Volberg によって見出された「双線形埋蔵定理」(bilinear embedding theorem)の拡張を進めました。

2015年、Wolff ポテンシャルを用いることで「3重線形埋蔵定理」(trilinear embedding theorem)を得ました。

2016年、Wolff ポテンシャルを反復して用いることで、その多重化に成功し、「 $n$ 重線形埋蔵定理」( $n$ -linear embedding theorem)を得ました。

2019年、藪田の補題を用いることで、2新直方体の新たな枠組みの下、開上双対領域において、 $n$ 重線形埋蔵定理を示しました。

(B) 筆者は、2015年、べき型の動径的荷重に対して Hardy-Littlewood 最大関数の荷重付き Morrey ノルム不等式が成立するための必要十分条件を与えました。

2018年、この手法を用いることで、べき型の動径的荷重に対して、分数べき積分作用素の荷重付き Morrey ノルム不等式が成立するための必要十分条件を与えました。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計24件（うち査読付論文 16件 / うち国際共著 2件 / うちオープンアクセス 3件）

1. 著者名 Nakamura S., Sawano Y. and Tanaka H.	4. 巻 to appear
2. 論文標題 Weighted local Morrey spaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.	6. 最初と最後の頁 to appear
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Saito H., Tanaka H. and Watanabe T.	4. 巻 23
2. 論文標題 Fractional maximal operators with weighted Hausdorff content	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Positivity	6. 最初と最後の頁 125-138
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Saito H. and Tanaka H.	4. 巻 74
2. 論文標題 The Fefferman-Stein type inequalities for strong fractional maximal operators	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Results in Math.	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tanaka H. and Yabuta K.	4. 巻 44
2. 論文標題 The n-linear embedding theorem for dyadic rectangles	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.	6. 最初と最後の頁 29-39
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Cao M., Tanaka H., Xue Q. and Yabuta K.	4. 巻 93
2. 論文標題 A note on Carleson embedding theorems	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Publicationes Mathematicae Debrecen	6. 最初と最後の頁 517-523
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Saito H. and Tanaka H.	4. 巻 61
2. 論文標題 The Fefferman--Stein type inequalities for strong and directional maximal operators in the plane	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Canadian Mathematical Bulletin	6. 最初と最後の頁 191-200
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sawano Y., Shimomura T. and Tanaka H.	4. 巻 47
2. 論文標題 A remark on modified Morrey spaces on metric measure spaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Hokkaido Math. J.	6. 最初と最後の頁 1-15
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mastylo M., Sawano Y. and Tanaka H.	4. 巻 41
2. 論文標題 Morrey type space and its Kothe dual space	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society.	6. 最初と最後の頁 1181-1198
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Saito H. and Tanaka H.	4. 巻 42
2. 論文標題 General maximal operators and the Reverse Hölder classes	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.	6. 最初と最後の頁 367-391
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sawano Y., Sugano S. and Tanaka H.	4. 巻 449
2. 論文標題 Muckenhoupt-Wheeden conjectures for fractional integral operators	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 J. Math. Anal. Appl.	6. 最初と最後の頁 456-463
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Saito H. and Tanaka H.	4. 巻 61
2. 論文標題 The Fefferman-Stein type inequalities for strong and directional maximal operators in the plane	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Canadian Mathematical Bulletin	6. 最初と最後の頁 191-200
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nakamura S., Sawano Y. and Tanaka H.	4. 巻 online
2. 論文標題 The fractional operators on weighted Morrey spaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 The Journal of Geometric Analysis	6. 最初と最後の頁 1-23
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Saito H., Tanaka H. and Watanabe T.	4. 巻 140
2. 論文標題 Dyadic Hausdorff content and the dyadic Hardy-Littlewood maximal operator	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Bull. Sci Math.	6. 最初と最後の頁 757-773
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tanaka H.	4. 巻 44
2. 論文標題 The n-linear embedding theorem	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Potential Anal.	6. 最初と最後の頁 793-809.
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Saito H. and Tanaka H.	4. 巻 -
2. 論文標題 The Fefferman-Stein type inequalities for strong and directional maximal operators in the plane	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Canadian Mathematical Bulletin	6. 最初と最後の頁 to appear
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sawano Y., Sugano S. and Tanaka H.	4. 巻 -
2. 論文標題 Muckenhoupt-Wheeden conjectures for fractional integral operators	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 to appear
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Saito H. and Tanaka H.	4. 巻 -
2. 論文標題 General maximal operators and the Reverse Holder classes	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.	6. 最初と最後の頁 to appear
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mastylo M., Sawano Y. and Tanaka H.	4. 巻 -
2. 論文標題 Morrey type space and its Kothe dual space	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society	6. 最初と最後の頁 to appear
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tanaka H.	4. 巻 -
2. 論文標題 Two-weight Morrey norm inequality and the sequential testing	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 RIMS Kkyroku Bessatsu.	6. 最初と最後の頁 to appear
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tanaka H.	4. 巻 40
2. 論文標題 Two-weight norm inequalities on Morrey spaces	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.	6. 最初と最後の頁 773-791
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -



1. 著者名 Tanaka H.	4. 巻 227
2. 論文標題 The trilinear embedding theorem	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Studia Math.	6. 最初と最後の頁 238-249
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tanaka H.	4. 巻 online
2. 論文標題 The n-linear embedding theorem	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Potential Anal.	6. 最初と最後の頁 0-0
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Sawano Y. and Tanaka H.	4. 巻 22
2. 論文標題 The Fatou property of block spaces	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 J. Math. Sci. Univ. Tokyo	6. 最初と最後の頁 663-683
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Izumi T., Sawano Y. and Tanaka H.	4. 巻 28
2. 論文標題 Littlewood-Paley theory for Morrey spaces and their preduals	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Rev. Mat. Complut.	6. 最初と最後の頁 411-447
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計11件（うち招待講演 8件 / うち国際学会 8件）

1. 発表者名 田中仁
2. 発表標題 掛谷の問題
3. 学会等名 第71回 ENCOUNTER with MATHEMATICS「フーリエ・カールソンから21世紀の調和解析へ」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田中仁
2. 発表標題 Two-weight norm inequalities for product fractional integral operators
3. 学会等名 6st East Asian Conference in Harmonic analysis and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田中仁
2. 発表標題 The $n$ -linear embedding theorem for dyadic rectangles
3. 学会等名 名古屋大学微分方程式セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 田中仁
2. 発表標題 The $n$ -linear embedding theorem for dyadic rectangles
3. 学会等名 筑波大学解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 田中仁
2. 発表標題 The Carleson type embedding inequality for dyadic rectangles
3. 学会等名 Harmonic Analysis and its Applications in Tokyo 2017 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 田中仁
2. 発表標題 The Fefferman-Stein type inequalities for strong fractional maximal operators
3. 学会等名 5st East Asian Conference in Harmonic analysis and Applications (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 H. Tanaka
2. 発表標題 The Fefferman-Stein type inequality for strong maximal operator in the heigher dimensions
3. 学会等名 Interactions between Harmonic and Geometric Analysis, (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 H. Tanaka
2. 発表標題 Muckenhoupt-Wheeden conjectures for fractional integral operators
3. 学会等名 International Workshop on Harmonic Analysis and its Applications in Beijing 2016 (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 H. Tanaka
2. 発表標題 The $n$ linear embedding theorem
3. 学会等名 4st East Asian Conference in Harmonic analysis and Applications 2016 (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Tanaka H.
2. 発表標題 Two-weight Morrey norm inequality and the sequential testing
3. 学会等名 Frontiers of Singular Integrals - HAWorkshop2015 - University of Helsinki Confluence (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 Tanaka H.
2. 発表標題 General maximal operators and the Reverse Holder classes
3. 学会等名 Harmonic Analysis and its Applications in Tokyo 2015 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------	---------------------------	-----------------------	----