

令和元年6月20日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04920

研究課題名(和文)バナッハ空間の幾何構造の研究とその応用

研究課題名(英文)A study of geometric structure of Banach spaces and its applications

研究代表者

斎藤 吉助 (SAITO, KICHI-SUKE)

新潟大学・自然科学系・フェロー

研究者番号：30018949

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：バナッハ空間の幾何構造の研究として、直交性の研究と幾何学定数の研究に2分される。まず、James定数が2をもつバナッハ空間の特徴付けに成功し、Math Nach, Mediter J Math, Math Inequal Applの3部作として発表した。さらに、バナッハ空間のBirkhoff直交性のSymmetryの研究を行い、von Neumann環等の空間において、symmetric pointの特徴付けを行った。特に、2次元symmetricバナッハ空間はRadon空間として知られているが、Day-James spaceの概念を用いて、特徴付けに成功し、高い評価を得ている。

研究成果の学術的意義や社会的意義

バナッハ空間における幾何学構造について、特に、2次元空間の構造がまだ解明されていなかったが、absolute ノルム空間の概念を用いて、その解明に成功した。それにより、抽象的だった、Radon空間がDay-James 空間を用いて、特徴付けしたことには、大きな意義がある。

研究成果の概要(英文)：In the study of geometry of Banach spaces, two notions of orthogonality and geometric constant are important. First, we succeeded to characterize 2 dimensional Banach spaces with James constant 2. We published three papers (Math Nach, Mediter J Math, Math Inequal Appl) about this results. In the study of symmetry of Banach spaces, we studied the symmetric points of von Neumann algebras and so on. In particular, we characterized symmetric 2-dimensional Banach spaces using generalized Day-James spaces.

研究分野：バナッハ空間論

キーワード：バナッハ空間 James定数 Birkhoff直交 Radon空間

1. 研究開始当初の背景

バナッハ空間の研究は、多種多様に渡っているが、特に、バナッハ空間における幾何構造の研究は今までにいろいろな立場から研究されてきた。内積空間において直交性は重要な概念であるのは言うまでもないが、バナッハ空間における直交性の概念は 1934 年に Roberts によって初めて導入されて以来、Birkhoff, James, Singer 等により研究されて、現在では、Alonso, Martin 等によって、Birkhoff の直交 (B-直交) と James による isosceles 直交 (I-直交) が重点的に研究されている。

一方、バナッハ空間の幾何学的性質は、バナッハ空間の構造理論や応用分野に大きく寄与しており、strictly convex、uniformly convex、uniformly smooth、uniformly nonsquare など多くの幾何学的な性質がある。ヒルベルト空間の有界閉集合上で定義された、非拡大写像は常に不動点を持つことが知られているが、2006 年に Garcia-Falset 等によって、uniformly nonsquare バナッハ空間でこの結果が成立することが示された。これにより、uniformly nonsquare でないバナッハ空間の構造研究が急務になってきた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、バナッハ空間における直交性に重点を置いて、バナッハ空間の幾何構造を研究することである。特に、内積空間においては、直交性の概念が重要であるように、この直交性の概念は、バナッハ空間の幾何学的な性質、例えば、狭義凸、一樣凸、uniformly nonsquare 等の概念と密接に関連しており、バナッハ空間の構造研究に非常に重要な概念であり、不動点理論や微分方程式論などの他分野への応用が見込まれる分野である。そこで、この研究が推進されれば、

- (1) バナッハ空間における種々の直交性により、新しい幾何学的な性質の導入
- (2) uniformly nonsquare でないバナッハ空間を、新しい幾何学的な性質により分類し、不動点理論の幾何学的な解析
- (3) バナッハ空間の中に内積に類似した構造を持つ semi-inner product space の構造研究を行うと共に、B-直交により直交分解の考察などの問題の解明が期待される。

3. 研究の方法

バナッハ空間の幾何構造の研究に重点をおいて研究を推進する。特に、今までに得られた結果を詳細に調べることにより、幾つかの直交性の概念を詳細に調べて、その違いや特徴を考察し、バナッハ空間の幾何構造を調べる。バナッハ空間の単位球の形状とも大きな関連があるので、その研究に関連させて、色々な幾何学的性質の特徴付けをノルム不等式などを用いて行うと同時に、新たな幾何学的性質を考察する。これらの結果を、非拡大写像の不動点理論の幾何的な解析に応用する。

この研究を遂行するために、代表者は各分担者と頻りに意見交換や研究打ち合わせを行うと同時に、研究成果を発表し、この分野に興味を持つ研究者と意見交換する。

4. 研究成果

(1) バナッハ空間の幾何学定数の研究として、特に、James 定数の研究が重要である。この研究では James 定数が 2 をもつバナッハ空間の構造についての解明に成功した。今までに、内積空間ならば、James 定数が 2 であることが知られており、逆は反例が示されているだけであったが、3次元以上のバナッハ空間で James 定数が 2 をもつならば、内積空間になることを示した(cf.)。2次元空間のバナッハ空間においては、内積空間でない2次元バナッハ空間で James 定数が 2 をもつ空間についての構造の解明に帰着される。まず、2次元 symmetric absolute space が James 定数が 2 をもつ場合の特徴付けを与えた(cf.)。この結果を 2次元 absolute space が $1/2$ 回転不変なノルムの場合において、James 定数が 2 をもつことと、ノルムが $1/4$ 回転不変であることが同値であることを示した(cf.)。さらに、極座標を使って、一般の場合、即ち、2次元バナッハ空間で James 定数が 2 をもつための必要十分条件を与えた。この論文の中で重要な例を作成している。この応用として、Lassak 問題を考察した。Hadwiger の凸体被覆に関する未解決問題に関連して提起されたものである。我々の作成した例が Lassak の予想に対して反例を与えることが示され、国内外から高い評価を得ている(cf.)。

(2) バナッハ空間における幾何定数として、重要な幾何定数が 2 つある。von Neumann-Jordan 定数と James 定数であるが、この定数の比較を考察した。今までに、この 2 つの定数を巡って、多くの関係式が示されている。ここでは、James 定数が 2 をもつバナッハ空間に対して、von

Neumann-Jordan 定数のとりえる範囲を調べることは、興味のある問題である。ここでは、James 定数が 2 をもつ 2 次元バナッハ空間の von Neumann-Jordan 定数のとりえる範囲を求める第 1 段階として、その最大値を調べた。そこで、James 定数が 2 をもち、 $1/2$ -回転不変なノルムを持つ 2 次元バナッハ空間の中で最大値を求めることに成功した。その値は $4-2\sqrt{2}$ であることを示した。

(3) バナッハ空間の直交性の研究として、Birkhoff 直交性の概念は重要である。その直交性が対称の時、symmetric と呼ばれるが、symmetric バナッハ空間が 3 次元以上の場合、内積空間になることが知られている。2 次元の場合は、symmetric バナッハ空間は Radon 空間として知られており、多くのバナッハ空間が存在しており、今までに、多くの特徴付けが研究されている。ここでは、一般化された Day-James space の概念を利用して、その特徴付けに成功した。その特徴付けは非常に明快であり、多くの応用が見込まれている。この結果は の論文で明記されており、Ann Funct Analysis に掲載決定されており、国内外から高い評価を得ている。

(4) 多くのバナッハ空間において、Birkhoff 直交性は対称性を持っていない。そこで、各元について、対称性を調べることは興味のある問題であり、Birkhoff 直交性の局所的な性質である left (right) symmetric point の概念が導入されており、今までに研究されてきた。先ず、論文 において、von Neumann 環において考察した。強 Birkhoff 直交の概念を考察し、von Neumann 環と可換 unital C^* -環において、left symmetric point 及び right symmetric point の完全な特徴付けを与えた。その結果を preserver 問題に応用している(cf.)。続いて、von Neumann 環の predual において、left symmetric point を考察した。結果として、predual が non zero left symmetric point をもつ von Neumann 環を限定した(cf.)。更に、 C^* -環の positive cone についての Birkhoff 直交性の対称性について考察した(cf.)。

(5) X をバナッハ空間とすると、 $J(X)$ を James 定数とする。von Neumann-Jordan 定数においては、 X とその共役空間 X^* の von Neumann-Jordan 定数は一致することが知られている。しかし、James 定数においては、いつも成立するとは限らないことが知られている。そこで、どんなバナッハ空間で一致するのかという問題を考察した。において、2 次元ローレンツ空間では、一致することを示した。更に、 X を 2 次元バナッハ空間とすると、そのノルムが、 $1/2$ 回転不変ならば、 $J(X)=J(X^*)$ であることを示した(cf.)。

(6) バナッハ空間の von Neumann-Jordan 定数の計算は困難であるが、多くの具体的なバナッハ空間に対しての計算の試みがある。ここでは、Day-James 空間や Banas-Fraczek 空間に対して、von Neumann-Jordan 定数の計算を試みた。計算の手法として、Banach-Mazur 距離の概念を用いている(cf. 、)。更に、において、2 次元 absolute ノルム空間に対して、von Neumann-Jordan 定数と他の幾何定数の関係を考察した。

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 23 件)

Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, A characterization of Radon planes using generalized Day-James spaces, Ann. Funct. Anal. に掲載決定

Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, On symmetry of Birkhoff orthogonality in the positive cones of C^* -algebras with applications, J. Math. Anal. Appl., 474(2019), 1488-1497.

Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, Left symmetric points for Birkhoff orthogonality in the preduals of von Neumann algebras, Bull. Aust. Math. Soc., 98(2018), no.3, 494-501.

Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, Characteristic properties of Banach spaces with James constant 2, J. Nonlinear Convex Analysis, 19(2018), 1665-1673.

Ken-Ichi Mitani, Yasuji Takahashi and Kichi-Suke Saito, Von Neumann-Jordan constant of l_p - l_q spaces, J. Nonlinear Convex Analysis, 19(2018), 1705-1709.

Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, A sufficient condition that $J(X^*) = J(X)$ holds for a Banach space X , Tokyo J. Math. 41 (2018), no. 1, 219-223.

Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, Symmetric points for (strong) Birkhoff orthogonality in von Neumann algebras with applications to preserver problems, J. Math. Anal. Appl., 463(2018), 1109-1131.

Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, New geometric notions of Banach spaces using π -direct sums, Linear and Nonlinear Analysis, 3(3017), No.2, 311-320.

Naoto Komuro, Ken-Ichi Mitani, Kichi-Suke Saito, Ryotaro Tanaka, Yukino Tomizawa, A comparison between James and von Neumann-Jordan constants. Mediterr. J. Math. 14

(2017), no. 4, Art. 168, 13 pp.

Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, On the class of Banach spaces with James constant $\sqrt{2}$ III, *Math. Inequal. Appl.* 20 (2017), no. 3, 865-887.

Yukino Tomizawa, Ken-Ichi Mitani, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, Geometric constants of $\sqrt{2}$ -rotation invariant norms on \mathbb{R}^2 , *Ann Funct. Anal.*, 8(2017), 215-230.

Ken-Ichi Mitani, Kichi-Suke Saito, and Yasuji Takahashi, On the von Neumann-Jordan constant of generalized Banas-Fraczek spaces, *Linear and Nonlinear Analysis*, 2(2016), 311-316.

Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, On the class of Banach spaces with James constant $\sqrt{2}$ II, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13(2016), no.6, 4039-4061.

Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, On the class of Banach spaces with James constant $\sqrt{2}$, *Math. Nach.*, 289(2016), 1005-1020.

Masahiro Sato, Naoto Komuro, Ken-ichi Mitani, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, Dual of extremal absolute norms on \mathbb{R}^2 and the James constant, *Banach J. Math. Anal.*, 10(2016), 251-266.

Hiroyasu Mizuguchi and Kichi-Suke Saito, On the upper bound of some geometric constants of absolute normalized norms on \mathbb{R}^2 , *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13(2016), 309-322.

Shunpei Yokoyama, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, Another approach of extreme norms on \mathbb{R}^2 , *J. Nonlinear Convex Analysis*, 17(2016), No. 1, 157-165.

Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito, Ken-ichi Mitani and Ryotaro Tanaka, On the convexity of von Neumann-Jordan constant, *J. Nonlinear Convex Analysis*, 16(2015), No.11, 2263-2268.

Ken-Ichi Mitani, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, On James constants of two dimensional Lorentz sequence spaces and its dual, *J. Nonlinear Convex Analysis*, 16(2015), No.11, 2269-2277.

Ken-ichi Mitani, Kichi-Suke Saito and Naoto Komuro, Extremal structure of absolute normalized norms and the skewness, *Linear and Nonlinear Analysis*, 1(2015), no.1, 159-167.

- ⑳ Kichi-Suke Saito, Masahiro Sato and Ryotaro Tanaka, When does the equality $J(X^*) = J(X)$ holds? *Acta Math. Sinica*, (English series), 31(2015), 1303-1314.
- ㉑ Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, New geometric properties of Banach spaces, *Math. Nach.*, 288(2015), no.10, 1163-1178.
- ㉒ Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, On generalized Beckners's inequality, *Anal. Funct. Anal.* 6(2015), 267-278.

[学会発表](計 30 件)

田中亮太郎, 小室直人, 斎藤吉助, Symmetric points for Birkhoff orthogonality I, 日本数学会年会、2019年3月17日-20日、東京工業大学。

田中亮太郎, 小室直人, 斎藤吉助, Symmetric points for Birkhoff orthogonality II, 日本数学会年会、2019年3月17日-20日、東京工業大学。

大和田智義, 斎藤吉助, 三谷健一、精密化された三角不等式の等号成立条件について、数理解析研究所研究集会、2018年11月26日-28日、京都大学。

三谷健一, 斎藤吉助, Geometrical constants of Day-James spaces、数理解析研究所研究集会、2018年11月26日-28日、京都大学。

斎藤吉助、田中亮太郎、小室直人、On the symmetry of Birkhoff orthogonality in Banach spaces、数理解析研究所研究集会、2018年11月26日-28日、京都大学。

Kichi-Suke Saito, Naoto Komuro and Ryotaro Tanaka, On the symmetry of Banach spaces, Nao-Asia 2018, November 5-9, 2018, OIST and Ana Internaitonal Manza Beach Resort, Okinawa, Japan.

斎藤吉助, Which dimensional Banach spaces are complicated two or three more? 数理解析研究所研究集会、2018年2月5日-8日、京都大学。

三谷健一, 斎藤吉助, 高橋泰嗣、Von Neumann-Jordan constant of generalized Banas-Fraczek spaces、数理解析研究所研究集会、2018年2月5日-8日、京都大学。

斎藤吉助, 小室直人, 田中亮太郎, On the structure of Banach spaces with James constant $\sqrt{2}$, 数理解析研究所研究集会、2017年10月23日-10月25日、京都大学。

Kichi-Suke Saito, Naoto Komuro, and Ryotaro Tanaka, More on the class of Banach spaces with James constant, *Nonlinear Analysis and Convex Analysis 2017*, July 4-July 9, 2017, Chitose City Cultural Center.

Ken-Ichi Mitani, Kichi-Suke Saito, and Yasuji Takahashi, On the von Neumann-Jordan constant of generalized Banach-Fraczek spaces II, Nonlinear Analysis and Convex Analysis 2017, July 4-July 9, 2017, Chitose City Cultural Center, Hokkaido.

富澤佑季乃, 三谷健一, 斎藤吉助, 田中亮太郎, 回転不変ノルムによる幾何学的定数, 日本数学会年会, 3月24日-3月27日, 2017, 首都大学東京南大沢キャンパス。

斎藤吉助, 小室直人, 田中亮太郎, James 定数の行列の表現とその応用について, 日本数学会年会, 3月24日-3月27日, 2017, 首都大学東京南大沢キャンパス。

田中亮太郎, 小室直人, 斎藤吉助, 最良の James 定数を持つバナッハ空間の特徴付けとその Lassak 問題への応用, 研究集会「関数空間の構造とその周辺」, 2017年2月6日 ~ 2月9日, 京都大学数理解析研究所。

斎藤吉助, 田中亮太郎, 三谷健一, 2次元ローレンツ空間の James 定数についての最近の発展, 研究集会「関数空間の構造とその周辺」, 2017年2月6日 ~ 2月9日, 京都大学数理解析研究所。

三谷健一, 斎藤吉助, 高橋泰嗣, von Neumann-Jordan constant of l_p - l_q spaces, 研究集会「関数空間の構造とその周辺」, 2017年2月6日 ~ 2月9日, 京都大学数理解析研究所。

斎藤吉助, 小室直人, 田中亮太郎, バナッハ空間の幾何学的定数と行列ノルムについて, 作用素論に基づく量子情報理論の幾何学的構造に関する研究と関連する話題, 京都大学数理解析学研究所, 2016年11月9日-11日。

三谷健一, 斎藤吉助, 高橋泰嗣, On the von Neumann-Jordan constant of Banach-Fraczek space, 日本数学会秋期分科会, 2016年9月15日-18日, 関西大学。

Kichi-Suke Saito, Naoto Komuro, Ryotaro Tanaka, Rotation invariant norms on R^2 and geometric constants, 京都大学数理解析研究所, 非線形解析学と凸解析の研究集会, 2016年8月31日-9月2日。

Kichi-Suke Saito, Naoto Komuro, Ryotaro Tanaka, l_2 -rotation invariant norms on R^2 and the James constant, Nao-Asia 2016, August 1-6, 2016, Toki Messe, Niigata, Japan.

⑲ Yukino Tomizawa, Ken-Ichi Mitani, Kichi-Suke Saito, Ryotaro Tanaka, Geometric constants of l_2 -rotation invariant norms, Nao-Asia 2016, August 1-6, 2016, Toki Messe, Niigata, Japan.

⑳ Ryotaro Tanaka, Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito, A characterization of two-dimensional normed spaces with James constant, Nao-Asia 2016, August 1-6, 2016, Toki Messe, Niigata, Japan.

㉑ Ken-Ichi Mitani, Yasuji Takahashi, Kichi-Suke Saito, On the von Neumann-Jordan constant of l_p - l_q spaces, Nao-Asia 2016, August 1-6, 2016, Toki Messe, Niigata, Japan.

㉒ 田中亮太郎, 小室直人, 斎藤吉助, 回転不変ノルムに対する James 定数の双対性について, 日本数学会年会, 2016年3月16日-19日, 筑波大学。

㉓ 田中亮太郎, 小室直人, 斎藤吉助, James 定数 2 とノルムの幾何構造との関係について, 実解析学シンポジウム 2015, 2015年10月24日, 東邦大学習志野キャンパス。

㉔ 斎藤吉助, バナッハ空間の幾何学的構造についての最近の進展, 2015年日本数学会秋期総合分科会, 特別講演, 2015年9月15日, 京都産業大学。

㉕ 水口洋康, 斎藤吉助, Absolute normalized ノルム空間における幾何学的定数の上限値, 2015年日本数学会秋期総合分科会, 特別講演, 2015年9月15日, 京都産業大学。

㉖ Kichi-Suke Saito, Naoto Komuro and Ryotaro Tanaka, Which Banach space has James constant 2 ?, The Fifth International Symposium on Banach and Function Spaces 2015, Kitakyushu Japan, 2015年9月3日。

㉗ Ken-Ichi Mitani, Yasuji Takahashi and Kichi-Suke Saito, On the von Neumann-Jordan constant for Banach-Fraczek space, The Fifth International Symposium on Banach and Function Spaces 2015, Kitakyushu Japan. 2015年9月3日

㉘ Ryotaro Tanaka and Kichi-Suke Saito, The duality equality for James constant of Banach spaces, The Fifth International Symposium on Banach and Function Spaces 2015, Kitakyushu, Japan. 2015年9月3日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:

発明者:

権利者:

種類:

番号:

出願年：
国内外の別：

取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1)研究分担者

研究分担者氏名：加藤 幹雄

ローマ字氏名：Mikio Kato

所属研究機関名：信州大学

部局名：工学部

職名：非常勤講師

研究者番号（8桁）：50090551

研究分担者氏名：三谷 健一

ローマ字氏名：Ken-Ichi Mitani

所属研究機関名：岡山県立大学

部局名：情報工学部

職名：准教授

研究者番号（8桁）：00468969

研究分担者氏名：渡邊 恵一

ローマ字氏名：Keiichi Watanabe

所属研究機関名：新潟大学

部局名：自然科学系

職名：教授

研究者番号（8桁）：50210894

（2016年3月18日辞退）

(2)研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。