

令和元年6月23日現在

機関番号：13902

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04923

研究課題名(和文)作用素値自由確率論の研究とランダム行列への応用

研究課題名(英文) Study on operator valued free probability, random matrices and their applications

研究代表者

佐久間 紀佳 (Sakuma, Noriyoshi)

愛知教育大学・教育学部・准教授

研究者番号：70610187

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題では以下のことを見つけた。

1つ目に正規分布が自由自己分解可能分布であることを示した。これにより自由正規分布の自由畳み込みによる分布族は単峰性を持つことなどを示したことになるなど、いくつかの問題を解決した。またその証明で他の分布にも応用可能な汎用的な判定条件を構成した。

2つ目にランダム行列のアウトライヤー問題に非可換確率論的な見方を導入した。モーメント法で漸近的巡回単調独立がサイズ極限で起こることを見出し、更に具体的なモデルについて、その極限分布を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ランダム行列理論は統計学、通信、量子情報理論、機械学習理論に応用がある。自由確率論は計算が困難な巨大なランダム行列のスペクトル分布を見積もる手法であり、その深化は応用上極めて重要である。本研究課題でも一例であげると、統計学上重要なアウトライヤーの問題を扱っているこれはデータ解析に関連する話題であり、我々の結果は具体的なモデルに対してアウトライヤーの位置を理論的に求める手法であり、それを統計学に応用すれば新しい検定手法などを構築でき、データ解析に応用できる可能性を秘めていると思われる。

研究成果の概要(英文)：In this research we proved the followings:

(1) We proved that the normal distribution is freely selfdecomposable. It means that free convolution semigroup of normal distributions are unimodal. It has some corollaries. In its proof, we found a necessary and sufficient condition for freely selfdecomposable distributions.

(2) We introduce non-commutative point of view to outlier problem. Based on moment methods, we proved that asymptotic cyclic monotone independence appear in our RMM. For some explicit models, we compute concrete limiting distributions.

研究分野：確率論

キーワード：自由確率論 無限分解可能分布 ランダム行列

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

自由確率論はその起源である作用素環への応用から始まり、巨大なサイズのランダム行列のスペクトル分布を見積もる道具として発展してきた。自由確率論の変形としての作用素値自由確率論というより複雑な構造をもつ自由確率論のフレームワークの研究が進められていた。それは複雑な構造を持つランダム行列に応用され、通信理論におけるモデルの解析などと絡みながら自身の計算手法を発展させてきている。作用素値自由確率論の観点から自由確率論を研究することで、より深い自由確率論の結果を出すことができると考え、本研究課題を進めた。

### 2. 研究の目的

作用素値自由確率論の研究の中で、その中でより深い自由無限分解可能分布、自由レヴィ過程に関する情報を得ること、例えば、自由自己分解可能性や単峰性などの性質を、特に R 変換などの解析的な道具を用いる観点からそれを得ることを目的にした。

### 3. 研究の方法

(1) 研究協力者：自由確率論・ランダム行列に関する議論・共同研究をお茶の水女子大学吉田裕亮、京都大学ブノワ・コリンズ、北海道大学長谷部高広らと、またその道具立てとして確率解析に関する議論を慶應義塾大学鈴木木一らと進めた。

(2) 自由確率論・ランダム行列に関する大きな研究会に参加し、海外の研究者らと交流を行い、情報を収集しつつ、非常に有用な技術を持つ研究者を訪問・招聘し、研究課題を進めた。特に、研究課題最終年度に作用素値自由確率論の研究を専門としているメキシコ CIMAT の Carlos Vargas を招聘し、現在の研究のまとめや今後の課題の整理などを行った。

### 4. 研究成果

(1) 本研究課題に深く関連する前研究課題「自由確率論に動機をもつランダム行列の研究」の残りの課題であった部分をまとめ、自由レヴィ過程の単峰性というものについてまとめた論文を発表した[雑誌論文 4]。これは任意の時刻で自由レヴィ過程の周辺分布が単峰になっているような場合をレヴィ測度により特徴付けした。またその中で、レヴィ測度が有界な台を持てば、十分時間が大きいとき必ず単峰になるという古典確率論で現れない現象を発見した。また台が非有界のときはそのような現象は起きないことも調べた。また、自由無限分解可能分布でアトムを持つケースを決定した。

(2) ランダム行列でその要素が MA モデルに従うようなものを考えた[雑誌論文 3]。このようなケースは複合ウィシャート行列になっており、自由確率論の手法が極めて有効である。特に、2 次自由性の計算から新しい検定手法を提案した。

(3) 非可換確率論からみたアウトライヤー問題についての研究を行った[雑誌論文 2]。一般に GUE のようなランダム行列のサイズ極限では極限スペクトル分布の台の外に固有値は現れない、ということが知られている。言い換えれば混合モーメントの収束だけでなく、作用素ノルムがそのサポートの上限に収束している、ということが知られている。それに対し、GUE のようなランダム行列に対して有限ランク行列などによる摂動をかけると、その作用素ノルムがそのサポートの上限に収束しているということは逆に成り立たなくなる。本研究では具体的に (a) 離散スペクトルを持つようなランダム行列と (b) Voiculescu の意味での結合極限分布をもつ回転不変性をもつランダム行列の 2 種類のランダム行列による非可換多項式を考え、具体例をもとにその outlier を求める公式とその原理を見出した。原理としては漸近的巡回単調独立性という性質が成り立っているということであり、それをモーメント法、特にワインガルデン解析を用いて示した。

(4) 自由正規分布が自由自己分解可能分布であることを示した[雑誌論文 1]。その中で自由自己分解可能分布の R 変換による解析的な特徴付けを行った。これは Bozejko らの正規分布の自由無限分解可能分布を示した際に用いた自由無限分解可能分布の解析的な特徴付けの自由自己分解可能分布版を考えたものである。このように自由無限分解可能分布のサブクラスの解析的な言葉での表現は今まで考えられておらず、新しいアイデアを与えたものと思われる。

### 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 4 件)

すべて査読あり

1. Hasebe, Takahiro; [Sakuma, Noriyoshi](#); Thorbjørnsen, Steen, The Normal Distribution Is Freely Self-decomposable. (to appear in Int. Math. Res. Not. IMRN).

2. Collins, Benoit; Hasebe, Takahiro; [Sakuma, Noriyoshi](#), Free probability for purely discrete eigenvalues of random matrices. J. Math. Soc. Japan 70 (2018), no. 3, 1111-1150. DOI: 10.2969/jmsj/77147714

3. Hasegawa, Ayako; [Sakuma, Noriyoshi](#); Yoshida, Hiroaki, Fluctuations of Marchenko-Pastur limit of random matrices with dependent entries. Statist. Probab. Lett. 127 (2017), 85-96. DOI: 10.1016/j.spl.2017.03.022

4. Hasebe, Takahiro; [Sakuma, Noriyoshi](#), Unimodality for free Lévy processes. Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. 53 (2017), no. 2, 916-936. DOI: 10.1214/16-AIHP742

[学会発表](計 28 件)

1. 佐久間紀佳, 自由確率論から考えるランダム行列の outlier の挙動, 慶應確率論ワークショップ, 2019 慶應義塾大学.
2. Noriyoshi Sakuma. The normal distribution is freely selfdecomposable, Okayama Workshop on Stochastic Analysis 2019, 岡山大学.
3. 佐久間紀佳, 自由確率論から考えるランダム行列の outlier の挙動, 大阪大学確率論セミナー, 2018, 大阪大学.
4. 佐久間紀佳, 自由確率論から考えるランダム行列の outlier の挙動, 福岡大学確率論セミナー, 2018, 福岡大学
5. 佐久間紀佳, 鈴木良一, A modified logarithmic Sobolev inequality for canonical Levy processes and its applications, 日本数学会 2018 年度秋季総合分科会, 2018 岡山大学
6. 長谷部高広, Steen Thorbjornsen, 佐久間紀佳, 正規分布の自由自己分解可能性, 日本数学会 2018 年度年会, 2018, 東京大学.
7. Noriyoshi Sakuma. On freely selfdecomposable distributions  
SIMA 2017, 2017 CIMAT.  
CIMAT Guanajuato, Mexico.
8. Noriyoshi Sakuma. On the support of free convolution semigroups  
Research seminar in Analysis in Quantum Information Theory, 2017  
IHP
9. Noriyoshi Sakuma. The normal distribution is freely selfdecomposable  
PRIMA 2017  
ITO Oaxaca
10. Noriyoshi Sakuma. Selfdecomposable distributions in classical and free probability  
Workshop on interactions between commutative and noncommutative probability, 2017  
Kyoto University.
11. Noriyoshi Sakuma. Generalized gamma convolutions のと Hyperbolically complete monotone function  
GGC セミナー, 2017  
京都大学
12. Noriyoshi Sakuma. Mixture of Exponential distribution とパレート分布の無限分解可能性  
GGC セミナー, 2017  
京都大学
13. Noriyoshi Sakuma. Generalized gamma convolutions の積率母関数と Pick の表現定理について  
GGC セミナー, 2017  
京都大学
14. Noriyoshi Sakuma. Unimodality for Lévy process  $(X_t)_{t \geq 0}$  on  $\mathbb{Z}_+$ : large time behavior  
Extended Kansai Probability Seminar, 2017.  
Kyoto Univ. Kyoto
15. Noriyoshi Sakuma. Free probability for purely discrete eigenvalues of random matrices  
2016.  
BIRS Banff Canada
16. Noriyoshi Sakuma. 具体的な Schwinger-Dyson 方程式の解の構成について  
鹿児島解析・確率論セミナー, 2016  
鹿児島大学
17. Noriyoshi Sakuma. 自由ブラウン運動と確率解析について  
鹿児島解析・確率論セミナー, 2016  
鹿児島大学
18. Noriyoshi Sakuma. Unimodality and selfdecomposability in classical and free probability  
17th WORKSHOP: NON-COMMUTATIVE PROBABILITY Lévy processes and operator algebras, with applications, Bedlewo, 2016
19. Noriyoshi Sakuma. ランダム行列モデルによる Schwinger-Dyson 方程式の解の構成について  
第 2 回 Free monotone Transport を読む会, 2016  
信州大学
20. Noriyoshi Sakuma. ランダム行列モデルによる Schwinger-Dyson 方程式の解の構成の証明について  
第 2 回 Free monotone Transport を読む会, 2016  
信州大学

21. Noriyoshi Sakuma. 自由レヴィ過程の単峰性について  
日本数学会, 2016.  
筑波大
22. Noriyoshi Sakuma. 自由独立性, 自由 Fock 空間, semicircular elements など-基礎-  
第 1 回 Free Monotone Transport を読む会, 2016  
成田ビューホテル
23. Noriyoshi Sakuma. 自由独立性, 自由 Fock 空間, semicircular elements など-そして伝説へ-  
第 1 回 Free Monotone Transport を読む会, 2016  
成田ビューホテル
24. Noriyoshi Sakuma. 自由レヴィ過程の単峰性について  
確率論シンポジウム, 2015  
岡山大
25. Noriyoshi Sakuma. 自由無限分解可能分布の単峰性について  
無限分解可能過程に関する諸問題, 2015  
統計数理研究所
26. Noriyoshi Sakuma. On limit spectral measure of marchenko-Pastur limit of random matrices with dependent entries and application of fluctuations  
日本数学会 2015 年度秋季総合分科会, 2015  
京都産業大学
27. Noriyoshi Sakuma. Infinitely divisible distributions on nonnegative integers  
Intersections between commutative and noncommutative probability theory, 2015  
Kyoto Univ.
28. Noriyoshi Sakuma. On limit spectral measure of Marchenko-Pastur limit of random matrices with dependent entries and application of fluctuations  
非可換確率論ワークショップ, 2015  
Ochanomizu Univ.  
〔その他〕  
ホームページ等  
愛知教育大学研究者総覧  
<http://souran.aichi-edu.ac.jp/profile/ja.5152e856daceccd8b07031094a0c261d.html>  
個人ホームページ  
<http://auemath.aichi-edu.ac.jp/~sakuma/>

## 6 . 研究組織

### (1)研究分担者

なし

### (2)研究協力者

研究協力者氏名：吉田 裕亮

ローマ字氏名：Yoshida, Hiroaki

研究協力者氏名：ブノウ コリンズ

ローマ字氏名：Benoit Collins

研究協力者氏名：長谷部 高広

ローマ字氏名：Hasebe, Takahiro

研究協力者氏名：鈴木 良一

ローマ字氏名：Suzuki, Ryoichi

研究協力者氏名：植田 優基

ローマ字氏名：Ueda, Yuki

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。