

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 16 日現在

機関番号：14602

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04925

研究課題名(和文)フラクタル構造のタイヒミュラー空間についての研究

研究課題名(英文)Research on the Teichmuller spaces of fractal structures

研究代表者

谷口 雅彦(Taniguchi, Masahiko)

奈良女子大学・名誉教授

研究者番号：50108974

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究の主目標は「フラクタル構造のタイヒミュラー空間」を定式化することであったが、一般リーマン面上のフラクタル構造から得られる無限可算点配置から得られるフラクタル構造のタイヒミュラー空間の定式化を完成させた。さらに標準的な幾何学的有界性を仮定すれば、そのようなタイヒミュラー空間が複素構造を許容することも明らかにした。次にフラクタル構造のタイヒミュラー空間上に幾何学的大域座標を導入することが第二の目標であったが、メビウス半群やクライン群さらには無限生成ケーベ群などに付随するフラクタル構造のタイヒミュラー空間上の幾何学的大域座標を導入し擬等角変形空間の大域表現を得た。

研究成果の概要(英文)：We formulate the concept of the Teichmuller space of a fractal structure and establish the fundamental theory on it. This is one of the main purposes of this research project. More precisely, we introduce the Teichmuller space of a countable set of points associated with the fractal structure on a general Riemann surface. Furthermore, we show that such a space admits a natural complex analytic structure if the fractal structure possesses standard bounded geometry. The second purpose of this research project is to introduce geometric global coordinates for such a Teichmuller space. On this point, for several important cases such as the iterated function systems by Mobius transformations, Kleinian group actions, and infinitely generated Koebe group actions, we introduce natural geometric global coordinates on the Teichmuller space of the corresponding fractal structure, and obtain a global representation of it.

研究分野：複素解析

キーワード：タイヒミュラー空間 フラクタル集合 擬等角写像

1. 研究開始当初の背景

(1) タイヒミューラー空間とは上位構造を付加した複素構造の擬等角変形空間で、付加構造を緩和することにより種々のモジュライ空間を構成する標準的な解析的手法である。複素力学系研究においてもタイヒミューラー空間は基本的かつ不可欠な手段となっている。一方、複素力学系のパラメータ空間における座標は各種の特別な可算点配置から得られることが多く、複素力学系に付随するフラクタル集合においては、そのような可算点集合が稠密性を持つことも研究開始当初には一般に知られていた。

(2) 上述のような特別な可算点配置を特に(フラクタル集合の)フラクタル構造と呼び、その擬等角的変形空間をフラクタル構造のタイヒミューラー空間と呼ぶが、研究開始当初には未知であったフラクタル構造のタイヒミューラー空間の定式化と基本性質の解明およびその幾何学的大域座標の導入や解析が、研究開始当初において緊急に解決すべき課題であった。

(3) 研究開始当初、複素力学系やそれに付随するフラクタル集合の基本性質の研究は代表者の諸論文も含め世界的にも有限次元に対するものが大半であった。一方で、座標を固定しての考察のみでパラメータ空間の内在的な特性を捉えることは困難であることも広く認知されてきていた。研究開始当初までに代表者は、一部連携研究者らとともに世界に先駆けて複素力学系のタイヒミューラー空間の一般理論の構築を進めてきていたが、研究開始当初には、タイヒミューラー空間の一般理論から得られる表現空間から大域座標を与えることは難しいと考えられていた。

(4) そのような状況下で代表者は両者の発展的統合が可能なることを発見した。その成果は連携研究者の藤村氏らとの共著論文として Journal of Fractal Geometry から平成 26 年に公刊されたが、代表者はさらにその成果を踏まえれば、連携研究者の藤川氏らとの共著論文や連携研究者の松崎氏の論文などの成果を援用することにより「フラクタル構造のタイヒミューラー空間」という概念の導入が可能であるという確信を研究開始当初に持つに至った。そこでそのような概念を定式化し、さらにその概念をそれまでの旧来の観点からの研究成果に敷衍することにより、タイヒミューラー空間論の新たな地平の獲得や複素力学系理論およびフラクタル幾何学の新展開を可能にすべく、本研究課題による科学研究費補助金の申請を行った。

2. 研究の目的

無限次元タイヒミューラー空間論の基礎理論は代表者や連携研究者などの精力的な研究により成熟してきていた。それらの成果を踏まえて以下を本研究の目標とした。

(1) 最初の目標として「フラクタル構造

のタイヒミューラー空間」の定式化を完了させる。

(2) 次に具体的研究として、クライン群や正則関数の反復合成系などのいくつかの重要な複素力学系に付随するフラクタル集合に対して、それらの「フラクタル構造のタイヒミューラー空間」に幾何学的大域座標を導入し、その結果得られる表現空間での安定領域の幾何学的形状や分岐状況などを明らかにする。

(3) 以上の研究成果を基に、より一般的で未だにほとんど研究が行われていない無限生成のショットキー群やケーベ群などに対する「フラクタル構造のタイヒミューラー空間」を解析する。

3. 研究の方法

まず特別な可算点配置としてのフラクタル構造の概念を導入し、すでに成熟しつつあるタイヒミューラー空間の一般理論の観点からフラクタル構造のタイヒミューラー空間の定式化を行うとともに、その基本的性質を解明した。一方で、重要な複素力学系から生じる種々のフラクタル集合にフラクタル構造を導入し、そのタイヒミューラー空間および付随する幾何学的大域座標の解析を進めた。そのような研究の完遂のため、連携研究者たちや関係する国内外の他の研究者たちと直接の研究打ち合わせ・情報交換を定期的に行うとともに同時に国内外の研究情報収集を図書購入などで精力的に行った。さらに数式処理や数値計算の手法を援用し研究成果の検証・予測を行うことで目標を達成した。

(1) 具体的には、平成 27 年度にまず無限次元タイヒミューラー空間論研究の世界的権威である松崎克彦氏(早稲田大学)を連携研究者に加え、タイヒミューラー空間の一般理論の観点から最初の目標、「フラクタル構造のタイヒミューラー空間」の定式化を行った。

その際、松崎氏と多くの共著論文を公刊している藤川英華氏(千葉大学)にも連携研究者として参加を要請し了解を得た。実際、無限次元タイヒミューラー空間論は代表者や松崎氏・藤川氏らのこれまでの研究により飛躍的に発展してきていた。特に松崎氏・藤川氏の近年の研究成果は「フラクタル構造のタイヒミューラー空間」という概念の導入と解析に極めて有効であることが代表者により発見され本研究の契機となった。このような方法により「フラクタル構造のタイヒミューラー空間」の定式化とその基本性質の解明を推進した。

(2) 平成 27 年度にはさらに次の目標、「フラクタル構造のタイヒミューラー空間」への幾何学的大域座標の導入にも着手した。

なお、反復関数系のアトラクタとしての自己相似フラクタル集合はフラクタル幾何学創成以来の一貫した主要テーマであったが、その繰り込み特性から複素解析学的には剛性を有するのでタイヒミューラー空間論には

なじまないものと思われていた。目標(1)で得られた定式化はこのような自己相似フラクタル集合に対しても適用可能であり、今までの常識を覆す特筆すべき研究である。

(3)さらに上記の目標の達成のため、いままでも蓄積された複素力学系研究の膨大な成果の中からフラクタル構造として再構築可能なものを抽出し前段の成果を適用していくという作業を進めた。具体的には、

a) メビウス半群の自己相似フラクタル集合

b) 有限生成クライン群の極限集合
の二つの場合に対象を絞り、それらの場合の解析を進めた。

その際、力学系研究には計算実験が欠かせないので、今までにも多数の共同研究を進めてきた藤村雅代氏(防衛大学校)にも連携研究者として数式処理・数値計算的手法の遂行を要請した。

(4)最後に、平成28年度末からは目標、無限次元の「フラクタル構造のタイヒミュラー空間」の解明の遂行を上記の連携研究者たちと共に開始した。

なおその主要な対象は、今まで複素力学系分野ではほとんど研究されてこなかった無限次元のパラメータ空間を持つ力学系であり、具体的には無限生成のショットキー群やケーベ群の極限集合を研究対象として解析したが、平行して無限次元タイヒミュラー空間に関する新たな研究も連携研究者たちと共に進めた。本研究の遂行においては、フラクタル集合に対する具体的な大域座標とタイヒミュラー空間論を融合させなければならないことを鑑みれば、以上の計画・布陣は極めて妥当であるだけでなく、これ以外の選択はあり得なかった。

4. 研究成果

(1)「フラクタル構造のタイヒミュラー空間」の定式化が本研究の最初の目標であったが、平成27年度にはまずそのための基礎研究として奈良女子大学大学院生の夏目阿佑子氏と共同で、古典的無限次元表現空間上の基本的な力学系についての超巡回性とカオス性との関連およびそれらの判定条件を解析し興味深い成果を得た。その成果は国際的専門誌から平成28年度中に公刊された(文献)。

また幾何学的座標系を用いた力学系的タイヒミュラー空間のコンパクト化は先行する科研費研究課題の目標であったが、有理関数の反復合成系の場合の成果が平成27年度にJournal of Analysis (Special Volume)から査読付き論文として公刊された(文献)。これらの研究成果により、その後の研究に必要な基礎情報を獲得することができ、それらの情報はその後の研究に大いに寄与した。

さらに、平成27年度に代表者はタイヒミ

ュラー空間論の古典的名著である Ahlfors の解説書の翻訳を完成させ、同年中に公刊された(文献)。この翻訳書により周辺の研究者との情報共有が飛躍的に容易になった。

(2)「フラクタル構造のタイヒミュラー空間」の定式化自体については、平成25年以降の研究成果の積み重ねを踏まえ平成27年8月24日から28日まで九州産業大学で行われた国際研究集会において多くの専門家との議論や情報交換を行った結果、ひとまず満足できる形での「フラクタル構造のタイヒミュラー空間」の定式化を完成することができた。その成果をまとめた速報は同国際研究集会の講演論文集へ研究論文として投稿されたが、その後の研究の進展に伴い大幅な書き直しが必要となった。そこで当該集会の組織委員会や査読者との調整を行い、投稿論文は平成28年度に全面的に改稿すること許された。そのため当該論文の公刊は平成29年にずれ込むことになったが、その論文(文献)の成果として、リーマン球面上の重要な複素力学系から生じるフラクタル構造の場合に上記の定式化が可能なることを公表することができた。

(3)上記の講演論文集への投稿論文内容を連携研究者たちと共有しての議論の過程で、連携研究者の藤川氏らと以前に行った共同研究の成果を適用すれば、「フラクタル構造のタイヒミュラー空間」の幾何学的大域構造のみならず複素構造についての成果が獲得できる可能性が高いことが明らかになった。そこで松崎氏や藤川氏の最新の研究成果(文献 など)なども踏まえた研究を進めた結果、平成28年度に上記定式化を一般の場合に完了させることができた。すなわち一般のリーマン面上の複素力学系から生じるフラクタル構造に対し「フラクタル構造タイヒミュラー空間」の定式化を完成させることができた。その成果は平成29年に公刊された査読付論文(文献)の主要定理の一つである。

(4)次の目標である「フラクタル構造のタイヒミュラー空間」の幾何学的大域座標の決定については、まず平成27年度にすでにメビウス半群の反復合成力学系に付随するフラクタル構造のタイヒミュラー空間に対して幾何学的大域座標の導入に成功した(文献)が、平成28年度にはクライン群の極限集合に付随するフラクタル構造のタイヒミュラー空間に対しても幾何学的大域座標の導入に成功した(文献)。

さらに特筆すべきは、上記の大域座標により得られる表現空間が複素構造を持つための条件として標準的な幾何学的有界性で十分であることが解明できたことである(文献)。この成果は代表者や連携研究者たちが世界に先駆けて構築してきた無限次元の一般タイヒミュラー空間論の適用により獲得できたが、その成果の適用範囲は今まで複素力学系分野ではほとんど研究されてこなか

った無限次元のパラメータ空間を持つ複素力学系や無限次元の配置空間などを包摂する広大なものである。さらに、これらの大域座標からフラクタル構造のタイヒミュラー空間の自然な表現空間が導入でき、その安定領域の決定のみならず重要な有限次元部分多様体に対するコンパクト化も容易に解明できることとなったのは言うまでもない。

(5) なお、平成 28 年度には「タイヒミュラー空間」の項目を分担執筆した朝倉数学辞典が公刊された(文献)。その内容は本研究にきわめて密接に関連する上記の無限次元の一般タイヒミュラー空間論の記述をも含むもので、本研究の上記の諸成果の点検作業のみならず周辺の研究者との情報共有にも大いに資することとなった。

(6) 最終年度の平成 29 年度には以上の成果の独創的応用としてさらに、クライン群論においてほぼ未踏の研究領域である無限生成ショットキー群やその上部構造である無限生成ケーベ群から生じる複素力学系のフラクタル構造のタイヒミュラー空間を集中的に解析した。当該のタイヒミュラー空間自体はすでに完成した一般論により定式化できるが、さらなる解析によりさらに幾何学的大域座標を具体的に構成することにも成功した。なお無限生成ケーベ群の場合には、その表現空間が複素構造を許すための条件もまた一般論より得られるが、より精密な解析の結果その条件を当該ケーベ群に関する一点軌道の条件として与えることに成功した。これらの成果は無限生成ショットキー群研究との関連からも極めて重要なものであるが、既に査読付論文として国際的学術雑誌に受理され、現在 online-first の論文として公表されている(文献)。

(7) 以上から、本課題研究は満足できる数多くの成果を得て成功裡に終了したといえる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

Masahiko Taniguchi, Koebe Spaces of Infinite Type, *Comput. Methods Funct. Theory*, 18 (2018), Online First.
DOI:10.1007/s40315-018-0235-5

Ege Fujikawa and Masahiko Taniguchi, The Teichmüller space of a countable set of points on a Riemann surface, *Conformal Geometry and Dynamics*, 査読有, 21 (2017), 64-77.
DOI:10.1090/ecgd/301

Masahiko Taniguchi, Teichmüller Space of a Countable Set of Points on the

Riemann Sphere, *Filomat*, 31 (2017), 査読有, 45-51.

DOI:10.2298/FIL1701045T

Ayuko Natsume and Masahiko Taniguchi, Asymptotically unweighted shifts, hypercyclicity, and linear Chaos, *Tokyo Journal of Mathematics*, 査読有, 39 (2016), 527-536.

DOI:10.3836/tjm/1484903135

谷口雅彦, タイヒミュラー空間, 朝倉数学辞典, 川又雄二郎・坪井俊・楠岡成雄・新井仁之 編, 朝倉書店, 分担執筆, 査読有, 2016, 365-366.

ISBN: 978-4-254-11125-5

谷口雅彦, 擬等角写像講義, L.V.アールフォルス著, 丸善出版, 翻訳, 2015.

ISBN: 978-4-621-08959-0

Ege Fujikawa, Topological characterization of the asymptotically trivial mapping class group, *Handbook of Group Actions*, Vol 1, ALM 31, Higher Education Press and International Press, Beijing-Boston, 査読有, 2015, 309-332.

ISBN: 978-1-57146-300-5

Masayo Fujimura and Masahiko Taniguchi, Rational functions with nodes, *Journal of Analysis, Special Volume*, 査読有, 2015, 85-100.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

谷口 雅彦 (MASAHIKO Taniguchi)

奈良女子大学・名誉教授

研究者番号: 50108974

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

藤村 雅代 (MASAYO Fujimura)

防衛大学校・総合教育学群・准教授

研究者番号: 00531758

松崎克彦 (KATSUHIKO Matsuzaki)

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号: 80222298

藤川英華 (EGE Fujikawa)

千葉大学, 大学院理学研究科, 准教授

研究者番号: 80433788