様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　 ６ 月 １３ 日現在

機関番号：８２７２３
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2018
課題番号：１５Ｋ０４９２６

研究課題名（和文）グラフ準同型写像の関数解析学的研究

研究課題名（英文）Study of graph homomorphisms from functional analysis

研究代表者

瀬戸　道生（Seto, Michio）

防衛大学校（総合教育学群、人文社会科学群、応用科学群、電気情報学群及びシステム工学群）・総合教育学群・准教授

研究者番号：３０３９８９５３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：本研究ではグラフの包含をヒルベルト空間の埋め込みの言葉に翻訳し、そこに de Branges-Rovnyak 理論を適用できることを示した。具体的な成果は次の２点である。
１．グラフの増大列に対し、離散 de Branges-Rovnyak 分解を適用し、グラフの連結成分に関する不等式を線形代数的な議論から導いた。
２．グラフの包含に対し、連続 de Branges-Rovnyak 分解を適用し、グラフラプラシアンに関する不等式を得た。なお、de Branges による Bieberbach 予想の最初の証明は難解なことで知られているが、本研究はそれに対するトイモデルを与えたことに相当する。

研究成果の学術的意義や社会的意義
有限グラフの包含関係や増大列は、グラフの時間発展の最も基本的な場合であり、数学だけでなく情報科学や、カーネル法を経由することで機械学習の分野にも現れる。従って、本研究のアイデアとそれに基づいて整備された道具が他分野に応用できることは大いに考えられる。実際、研究期間の最後の半年では、応用系の研究者との会合に参加し、理論と応用それぞれの問題意識を交換する機会を複数回もった。その成果は、現在、講義ノートとして整理中である。このように、本研究課題は純数学的な問題意識から出発したものであったが、最終的に数学内に留まるものではなく、他分野への応用の可能性も広げる意義のあるものとなった。

研究成果の概要（英文）：In this study, we translated inclusion relations of finite graphs (assumed to be simple and connected) into the language of embedding of Hilbert spaces, and showed that de Branges-Rovnyak theory can be applied to this setting. Then, it gives a general method of finding inequalities. In particular, we had the following two consequences.
1. As an application of discrete de Branges-Rovnyak decomposition to increasing sequences of finite graphs, we gave a dimension formula for quasi-orthogonal complements (which can be considered as generalized quotient spaces in a broad sense) and an inequality concerning numbers of connected components of graphs.
2. As an application of continuous de Branges-Rovnyak decomposition to inclusion of two finite graphs, we gave quadratic inequalities for graph Laplacians. As a by-product of our study, our method gives a toy model of the de Branges' first proof, known to be very complicated, of the Bieberbach conjecture.

研究分野：関数解析学、複素解析学

キーワード：グラフ　ラプラシアン　再生核

１．研究開始当初の背景

(1)　関数解析学の専門家である研究代表者は、グラフ理論の研究者との交流の中で、グラフ準同型写像に関する研究が少ないことを知った。しかし、それと同時に、関数解析学におけるある理論（de Branges-Rovnyak 理論）がグラフ準同型写像の研究に応用できることに気づいた。これが本研究課題の始まりである。

(2)　研究開始当初、研究代表者のグラフ理論に関する知識を確かなものにするため、グラフ準同型写像に関する習作的な論文（〔雑誌論文〕の ③）を執筆したが、それにより、一般のグラフ準同型写像を扱う前に、特別な場合に相当する（しかし、最も重要な場合である）グラフの増大列を扱う道具を整備する必要があることに気づかされた。そこで、研究期間の２年目から研究目的を少々修正し、グラフ準同型写像の研究を視野に入れつつ、de Branges-Rovnyak 理論をグラフの増大列に応用することを目標とした。

２．研究の目的

(1)　本研究の目的は de Branges-Rovnyak 理論をグラフ理論に使えるように整備し、関数解析学の視点でグラフの増大列やグラフ準同型写像を研究することである。より具体的には、グラフの増大列をヒルベルト空間の埋め込みの言葉に翻訳し、そこに de Branges-Rovnyak 理論を適用し、その帰結を調べることである。特に、グラフの増大列から不等式を得る一般的な方法が手に入ることが当初から期待された。

(2)　de Branges による Bieberbach 予想の最初の関数解析色の強い証明は難解なことで知られている。現在流通している証明は関数解析色の少ない改良版である。しかし、その改良版からは証明の基本アイデアを読み取ることは困難なように思う。本研究課題の関数解析学側からの研究目的は、その de Branges の最初の証明のグラフ理論版を考え、de Branges のアイデアを深く理解することである。実際、グラフの増大列に de Branges-Rovnyak 理論を適用することは、de Branges による Bieberbach 予想攻略への第一段階の離散版とみなすことができる。

(3) 以上の研究の目的 (1) と (2) を簡潔に述べるならば、本研究課題の目的は以下の対応表を埋めることである。

複素解析学	領域の時間発展	dBR 分解（離散）	dBR 分解（連続）	Loewner 方程式
グラフ理論	?	?	?	?

この表の上の欄には複素解析学における Bieberbach 予想証明でのキーワードが並んでおり、下の欄の？マークはグラフ理論での対応物があるか、又はグラフ理論に適用した際に何が導かれるかという問いを意味する（dBR 理論は de Branges-Rovnyak 理論の省略）。本研究課題終了後の表については研究成果の (5) を参照。

３．研究の方法

(1)　離散 de Branges-Rovnyak 分解をグラフの増大列に適用する。より正確に述べると、頂点集合を共通とする有限単純グラフの増大列からヒルベルト空間の埋め込みの列を構成する。ここでその列をテレスコープすることを考えたいが、今はヒルベルト空間の内積構造とグラフの隣接構造とが等価であるためそれは考えづらい。しかし、離散 de Branges-Rovnyak 分解なら適用でき、そこから自明な次元評価が導かれる。その次元はグラフ特有の量であることが推察できるため、そこからグラフに関する不等式を得られることが期待できる。

(2)　連続 de Branges-Rovnyak 分解をグラフの包含に適用する。より正確に述べると、頂点集合を共通とする有限単純グラフの包含を重み付きグラフで一様に補間して得られるグラフの時間発展を考え、そこからヒルベルト空間の埋め込みの族を構成する。この族に対し、連続 de Branges-Rovnyak 分解を適用するとそれに付随するノルム不等式が得られる。それはグラフラプラシアンに関する不等式を与えることが推察される。また、Bieberbach 予想に対する de Branges の証明の Vasyunin-Nikolskii による解釈によれば、本研究課題の設定ではグラフの自己同型群込みの不等式も得られるはずである。

４．研究成果

(1) 研究の方法 (1) で述べたことを無限グラフを含む枠組みで実行した(〔雑誌論文〕の ②)。主結果として、一種の商空間の次元を計算し、それがグラフの連結成分の数と一致することを示した。特に有限グラフに対しては、連結成分に関する不等式を得た。グラフ理論的には、この不等式はグラフの増大列 $G_1 \subset G_2 \subset \cdots \subset G_{n-1} \subset G_n$ に対し、G_k-G_{k-1} $(2 \leqq k \leqq n)$ と G_n-G_1 の連結成分の数の関係を与えるものである。最終的に得られた不等式は初等的なものであったかもしれないが、関数解析学的には、連結成分の個数が次元として現れるヒルベルト空間を構成したことになる点を強調したい。また、有限グラフの場合に議論を簡略化したものを学生の卒業研究

のテーマとして取りあげ、補助的な計算も新たに付け加えた卒業論文としてまとめるよう指導した（〔その他〕の ④）。

(2) 研究の方法 (2) で述べたことを実行し、グラフラプラシアンに関する不等式を得た（〔雑誌論文〕の ①）。有限グラフの包含 $G_0 \subset G_1$ を重み付きグラフで一様に $G_0 \subset G_t \subset G_1$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ と膨らませ、ここに連続 de Branges-Rovnyak 分解を適用し、G_0 と G_1 のグラフラプラシアンに関する不等式を得た。この不等式は関数解析学的にはフーリエ解析におけるベッセルの不等式やパーセヴァルの等式に相当する自然なものである。 一方、グラフ理論的には、G_0 と G_1 に包含関係があった場合、それらのラプラシアンのスペクトル的な性質には制限がかかる（G_0 と G_1 が互いに束縛する）と考えられるが、今回の不等式はその一端を捉えたものと考えている。最終的な不等式にはグラフの自己同型群に関する情報も組み込まれているのだが、その点に関するグラフ理論的な解釈はまだ十分とは言えず、今後の課題として残された。

(3) 研究成果 (2) の副産物として、de Branges による Bieberbach 予想の最初の証明に対するトイモデルが得られた。前世紀の複素関数論において、Bieberbach 予想は有名な問題の一つであった。1984 年に de Branges がその予想を関数解析を基礎に肯定的に解いたが、当初の方法はとても複雑であったため、現在は簡略化された（関数解析抜きの）証明が流通している。しかしながら、関数解析学者として、その本質的なアイデアを知るには最初の証明を読むしかないように思う。本研究は de Branges の方法に新たな応用例を付け加えたことになる。これにより、de Branges の方法への理解が大いに進んだ。特に関数解析部分についてはほぼ完全に理解することができた。しかし、この設定ではもう一つの重要な道具である Loewner の微分方程式に相当するものが自明であるため、もし非自明な方程式が現れる設定を見つけることができれば、理論は大きく発展する可能性がある。

(4) 研究成果 (1)、(2) の準備の段階で、de Branges-Rovnyak 理論についてまとめたものを京都大学数理解析研究所の講究録に投稿した（〔その他〕の ② と ③）。研究成果 (1)、(2) の概要をまとめ、さらにハーディ空間上の Toeplitz 作用素に関する考察を加えたものも〔学会発表〕の ③ の後に京都大学数理解析研究所の講究録に投稿したが、まだ発行されていないようである。また、今回の研究で得られた知見を織り込んだ関数解析学に関する教科書（〔図書〕の ①）と講義ノートを作成した（〔その他〕の ① 内を参照）。

(5) 本研究の成果により、研究の目的の (3) での表を以下のように書き換えることができた。

複素解析学	領域の時間発展	dBR 分解（離散）	dBR 分解（連続）	Loewner 方程式
グラフ理論	グラフの増大列	○	○	?

この表に関し簡単に説明する。本研究ではグラフの増大列を関数解析学的に扱う方法を整備した。その際、Bieberbach 予想の証明で重要であった「領域の時間発展」の離散版を「グラフの増大列」とみなした。次に、そこに de Branges-Rovnyak 理論（離散、連続）が適用できることを示し、そこから複数の不等式が導かれることをみた。しかし、 Loewner 方程式だけは今回自明なものしか考えることができなかった。もし、グラフ理論における非自明な Loewner 方程式を見つけることができれば、この研究は数学の範囲に留まらずさらに発展すると思われる。今後の研究課題である。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計３件）

① 瀬戸 道生，須田 庄，Gram matrices of reproducing kernel Hilbert spaces over graphs IV (quadratic inequalities for graph Laplacians)，Algebra i Analiz，査読有，2019 年，Vol. 31，No. 1，143-155
http://www.pdmi.ras.ru/AA

② 瀬戸 道生，須田 庄，Gram matrices of reproducing kernel Hilbert spaces over graphs III，Operators and Matrices，査読有，2017 年，Vol. 11，No. 3，759-768
http://oam.ele-math.com/

③ 瀬戸 道生，Composition operators induced by injective homomorphisms on infinite weighted graphs，Journal of Mathematical Analysis and Applications，査読有，2016 年，Vol. 435，No. 2，1467-1477

https://www.journals.elsevier.com/journal-of-mathematical-analysis-and-applications

〔学会発表〕（計５件）
① 瀬戸 道生, Applications of de Branges-Rovnyak decomposition to Graph Theory, Recent Advances in Operator Theory and Operator Algebras 2018 (OTOA 2018), 2018年
② 瀬戸 道生, Application of the theory of quasi-orthogonal integrals to graph theory, 日本数学会（応用数学分科会）, 2018年
③ 瀬戸 道生, Applications of the theory of quasi-orthogonal integrals, RIMS Conference Researches on theory of isometries and preserver problems from a various point of view, 2018年
④ 瀬戸 道生, Quadratic inequalities for graph Laplacians, Japanese Conference on Combinatorics and its Applications 2017 (JCCA 2017), 2017年
⑤ 瀬戸 道生, 再生核と重み付き無限グラフ上の準同型写像について, 再生核の応用についての総合的な研究, 2015年

〔図書〕（計１件）
① 荷見 守助、長 宗雄、瀬戸 道生、内田老鶴圃、関数解析入門―線型作用素のスペクトル、2018、235

〔その他〕
① https://researchmap.jp/mseto/
② 瀬戸 道生, Introduction to the Theory of Quasi-orthogonal Integral, 数理解析研究所講究録 2035, 60-73, 2017年
③ 瀬戸 道生, 再生核と重み付き無限グラフ上の準同型写像について, 数理解析研究所講究録 1980, 81-94, 2016年
④ 星 一貴, グラフラプラシアンの解析的研究, 防衛大学校 電気情報学群 情報工学科（数学講座）卒業論文, 2018年

６．研究組織

(1)研究分担者
研究分担者氏名：須田 庄

ローマ字氏名：(SUDA, Sho)

所属研究機関名：愛知教育大学

部局名：教育学部

職名：講師
研究者番号（8桁）：30710206

研究分担者氏名：細川 卓也

ローマ字氏名：(HOSOKAWA, Takuya)

所属研究機関名：茨城大学

部局名：工学部

職名：准教授
研究者番号（8桁）：90553579

(2)研究協力者
研究協力者氏名：谷口 哲至
ローマ字氏名：(TANIGUCHI, Tetsuji)

研究協力者氏名：星 一貴
ローマ字氏名：(HOSHI, Kazuki)