

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 9 日現在

機関番号：15201

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04927

研究課題名(和文) タイヒミュラー・モジュラー群の有理変換群としての表現の可能性の研究

研究課題名(英文) Study on the representation of Teichmüller modular groups as a group of rational transformations

研究代表者

中西 敏浩 (Nakanishi, Toshihiro)

島根大学・総合理工学研究科・教授

研究者番号：00172354

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,300,000円

研究成果の概要(和文)：位相有限 $(g,n)$ 型タイヒミュラー空間の大域的座標系の研究を行った。タイヒミュラー空間を曲面上の双曲計量の変形空間とみると、タイヒミュラー空間のパラメータを $(g,n)$ 型 $(3g-3+n>0)$ の曲面上の $d=6g-5+2n$ 個の単純閉測地線の長さで与えることができる。この事実についてはすでに多くの研究があるが、我々は単純閉測地線をつまく選ぶと、それらの長さに依存する量(トレース関数)を用いた写像類群のタイヒミュラー空間上への作用が有理変換群になることを証明した。すでに種数2の閉曲面のタイヒミュラー空間について示されていたこの結果を今回、任意の位相有限型タイヒミュラー空間に拡張することができた。

研究成果の概要(英文)：We studied parametrizations of the Teichmüller space of a surface of type  $(g,n)$ . The Teichmüller space, which is a deformation space of hyperbolic structures on the surface, can be parametrized globally by lengths of  $d=6g-5+n$  closed geodesic curves, as already shown by P. Schmutz and others. Our main result is as follows: there exist  $d$  closed curves on the surface such that in the variables defined by their lengths the mapping class group acting on the Teichmüller space is represented by a group of rational transformations. As an application of this result, we could find presentations by Humphries generators of all finite subgroups of the mapping class group of closed surface of genus two.

研究分野：複素解析学

キーワード：タイヒミュラー空間 写像類群 リーマン面 双曲幾何学 不連続群論

## 1. 研究開始当初の背景

$m$  個の境界成分をもつ種数  $g$  のコンパクト向き付け可能曲面  $(2g+m-3)$  のタイヒミュラー (Teichmüller) 空間  $T(g,m)$  を有限次元の実または複素パラメータ空間に埋め込むことを考える。さまざまなパラメータが知られているが、タイヒミュラー空間を曲面上の双曲計量の変形空間と見ると曲面上の閉測地線の長さをパラメータとして選ぶことができる。閉測地線の長さをを用いたタイヒミュラー空間の座標付けについては古くから多くの研究がある。その中で特筆すべき結果は大域的座標付けに必要な測地線の個数の最小数  $d$  が  $6g-5+2m$ 、すなわちタイヒミュラー空間の次元より一つだけ多い数であるという P. Schmutz の定理である。こうしたパラメータを変数として  $T(g,m)$  に作用するタイヒミュラー・モジュラー群 (写像類群) を表せばどのような変換になるかは自然で大変興味深い問題であるにも関わらず、その研究はこれまであまりなされてこなかった。

研究代表者の中西は連携研究者の中村豪とともにタイヒミュラー・モジュラー群の表現に取り組み、種数 2 の閉曲面のタイヒミュラー空間を含むいくつかの  $T(g,m)$  について、タイヒミュラー・モジュラー群が有理変換群の中に表現をもつことを発見した。種数 2 の閉曲面の場合にタイヒミュラー・モジュラー群が有理変換群で表わされるという事実は予想外のことであったが、この結果に勇気づけられて一般の  $(g,m)$  型のタイヒミュラー・モジュラー群の有理変換表現の可能性の問題に取り組むことにした。この問題の研究の意義はタイヒミュラー空間や写像類群そのものの解明とともに、それから派生する 3 次元多様体論 (円周上の曲面束の双曲幾何化)、力学系 (高次元の変換の反復力学系)、数論 (ディオファントス問題) に応用をもつことにある。

閉測地線の長さによるパラメータの必要個数がタイヒミュラー空間の次元より大きいことは S. Wolpert の定理により避けられないことであるが、その一方タイヒミュラー空間の像に含まれるパラメータの関係式を求めよという興味深い問題が生じる。実際  $T(1,1)$  はマルコフ方程式で表わすことができ、数論的に面白い性質を有している。一般の場合でも、適当な座標を選べば関係式は Ruler-Compass 関数 (四則演算と平方根を取る操作を有限回繰り返して得られる関数) の零点集合に含まれることが Feng-Luo によって示されている。我々の研究は 19 世紀末の Fricke-Klein の研究に始まり、Keen, Seppälä-Sorvali, 奥村, Schmutz, Feng Luo らによって継続された測地線の長さをを用いたタイヒミュラー空間の座標付けの研究の流れの延長線上に位置するが、タイヒミュラー・モジュラー群の研究をテーマに添えたこ

とに新しさがある。

## 2. 研究の目的

我々の研究課題は Feng Luo らによるこれまでのタイヒミュラー空間の座標付けの研究を継承し、さらにタイヒミュラー・モジュラー群の研究へと拡大させたものである。研究代表者の中西は以前、いくつかのモジュライ空間の Weil-Petersson (WP) 体積を計算した。(非閉曲面のモジュライ空間の WP 体積については、M. Mirzakhani による決定的な仕事がある。中西の結果は彼女の論文に引用されている。) WP 体積を正攻法で計算するにはタイヒミュラー・モジュラー群の作用の基本領域を知る必要からタイヒミュラー・モジュラー群の具体的表示が必要である。いくつかの  $(g,m)$  についてこの群が有理変換群の表現をもつことがわかっている。特に  $(0,5), (1,2), (2,0)$  の場合は中村と中西の研究によって初めてこのことが明示されたと思われる。一般の  $(g,m)$  についても同じことが成り立つとを予想し、その解決を目指すのが本研究の目的であった。

本研究が期待通り進捗すれば派生する次の研究にも取り組む。

- (1) タイヒミュラー・モジュラー群の作用に関する基本領域、したがってモジュライ空間の決定
- (2) タイヒミュラー空間の Weil-Petersson 幾何の研究
- (3) 円周上の曲面束の構造をもつ 3 次元双曲多様体の具体例の構成
- (4) 写像類を表現する有理変換の高次元反復力学系
- (5) Markov 方程式の整数解をモデルとする不定方程式の整数解の問題
- (6) McShane 恒等式の一般曲面への拡張

長い歴史をもつタイヒミュラー空間の研究にも関わらず、トーラスあるいは 1 点穴あきトーラスなど 2, 3 の位相的に単純な曲面のタイヒミュラー空間を除けば、種数 2 の閉曲面のタイヒミュラー空間でさえも現状では個性を欠いた姿しか見て取ることができない。しかしタイヒミュラー・モジュラー群を有理変換として実現することができれば、多くのことが具体的な計算や数値実験によって検証できるようになる。必要ならばコンピュータの援用することによって興味深い性質をもつ 3 次元双曲多様体やクライン群の具体例の構成やコンピュータ・グラフィックによる可視化を行えば、今まで知られていない現象や応用が見つかる可能性がある。とくに写像類を表現する有理変換の高次元反復力学系は萌芽的要素を含んでおり、3 次元多様体や数論など他の数学の分野を巻き込んで発展する可能性をもつ。

我々の目的は一般型  $(g,m)$  のタイヒミュラー・モジュラー群の有理変換群への表現の可

能性を調べることで、その結果を関連する(1)-(6)の研究に応用することである。その成果がタイヒミュラー空間の研究の新しい手法を与えると大いに期待できる。

### 3. 研究の方法

タイヒミュラー・モジュラー群の有理変換群としての表現の可能性の解決を目指す。これまでの研究によって  $(g,m)=(0,5), (1,2), (2,0)$

について位相的有限  $(g,m)$  型曲面のタイヒミュラー空間  $T(g,m)$  に作用するタイヒミュラー・モジュラー群を有理変換群として表現することに成功した。そこでの研究の方法を踏襲し蓄積したデータを利用し、先行研究の手法を精査して一般の  $(g,m)$  型のタイヒミュラー・モジュラー群も有理変換群として表現できるかどうかを調べた。それを3つのステップで行った。

(1) タイヒミュラー空間  $T(g,m)$  をあるパラメータ空間に埋め込む。

(2) タイヒミュラー空間の点を表すパラメータがみたすべき条件を求める(パラメータ空間における  $T(g,m)$  の位置の決定。)

(3) タイヒミュラー・モジュラー群の作用をパラメータを用いて表示する。

タイヒミュラー空間  $T(g,m)$  にはさまざまな座標系が導入されるが、我々は Weil-Petersson 計量との親和性から、タイヒミュラー空間を曲面の双曲計量あるいはフックス群の変形空間と見なしたときの(測地線の長さ関数と等価な)トレース関数の組を扱った。Weil-Petersson 幾何との関連では Fenchel-Nielsen 座標も候補であるが、座標を取り替えたときの変換が複雑になるという難点をもつ。P. Schmutz の定理により、 $6g-5+2m$  個のトレース関数(あるいは測地線の長さ関数)を用いてタイヒミュラー空間  $T(g,m)$  を大域的に表せることがわかっており、我々もこの結果をふまえて、タイヒミュラー空間の次元より1だけ大きい個数のトレース関数による座標付けを考察した。

基本的には研究代表者中西敏浩が単独で研究を行ったが、これまでも共著論文を出版している中村豪を連携研究者に加え研究連絡を不断に行った。中村氏には彼が得意とするリーマン面の自己同型群についての知識を提供してもらった。学会や研究集会に参加したときや島根大において開催したセミナー時に廣瀬進氏(東京理科大)、高村茂氏(京都大)、田所勇樹氏(木更津高専)、John Parker 氏(英 Durham 大)他の位相幾何やリーマン面や3次元双曲多様体論の専門家からも必要な知識を提供してもらった。

研究には膨大な計算が関わるのでこれまでと同様、数式処理ソフト Mathematica を援用した。

### 4. 研究成果

コンパクト双曲曲面のタイヒミュラー空間の大域座標系についての研究を行い、目標としていた閉測地線の長さを用いたトレース関数によってタイヒミュラー空間の大域的座標を与え、それによるタイヒミュラー・モジュラー群(写像類群)の表現が有理変換のつくる群になることを示すことができた。ただし有理変換群への表現は得られたものの非常に長く複雑な式によって表わされるのでこのままでは応用に供しづらい。有理変換群の理論を深化させ、より高速に数値計算できる形にする必要がある。応用についての研究成果は期待どおりではなかったが、有理変換群表現の応用についていくつか得られたことがある。写像類のタイヒミュラー空間上の作用の不動点を見つけることによって、7つの閉曲線のまわりのデー・ツイストからなるハンフリー生成系を用いた種数2の写像類群のすべての有限部分群の群表示を具体的に与えることができた。さらに有限部分群のホモロジー表現も計算した。この結果により種数2の閉リーマン面の等角自己同型群の分類に新たな知見を加えることができた。種数3の閉曲面の写像類群の有限部分群のハンフリー生成系を用いた群表示については研究途中で、巡回群や一部の二面体群については具体的な表現を得ることができたのみである。同じ結果はすでに廣瀬進氏によって位相-代数幾何的な手法で得られているが、写像類群の力学系を用いる我々とは手法が異なる。種数2のタイヒミュラー空間を表す7次元空間内の超曲面に写像類群の作用について座標が正整数ばかりからなる軌道が少なくとも2つ存在することがわかった。他に同様な軌道が存在するかどうかは未解決である。数論的フックス群の分類と関わる興味深い研究であるがこれからの課題である。

### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計2件)

1. G.Nakamura T.Nakanishi, Generation of finite subgroups of the mapping class of genus 2 surface by Dehn twists, J. Pure and Applied Algebra, 222, (2018), 3585-3594

2. G.Nakamura T.Nakanishi, Parametrizations of Teichmüller spaces by trace functions and action of mapping class groups. Conform. Geom. Dyn. 20 (2016), 25-42.

[学会発表](計5件)

1. 中西敏浩, Generation of finite subgroups of the mapping class group of

genus 2 surface by Dehn twists, 第 15 回  
代数曲線論シンポジウム, 日本大学理工学部  
駿河台校舎, 2017 年 12 月 17 日

2. Nakanishi, Toshihiro,  
Rational representation of mapping  
class group acting on Teichmüller space I,  
II, Geometry of Moduli Space of Low  
Dimensional Manifolds 京都大学数理解析研  
究所, 2016 年 12 月 16 日

3. Nakanishi, Toshihiro,  
Action of mapping classes on Teichmüller  
space and their representations as  
rational transformations, リーマン面に  
関連する位相幾何学, 東京大学数理科学研究科,  
2016 年 9 月 4 日,

4. Nakanishi, Toshihiro,  
A coordinate-system for the Teichmüller  
space of a compact surface and a rational  
representation of the mapping class group,  
離散群と双曲空間のトポロジーと解析, 京大  
大学数理解析研究所, 2016 年 6 月 24 日

5. 中西敏浩, 中村豪, タイヒミュラー空間の  
トレース関数による座標系と写像類群, 日本  
数学会秋季総合分科会, 京都産業大学, 2015  
年 10 月 14 日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
出願年月日 :  
国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :  
発明者 :  
権利者 :  
種類 :  
番号 :  
取得年月日 :  
国内外の別 :

〔その他〕  
ホームページ等

6. 研究組織  
(1) 研究代表者  
中西 敏浩, (NAKANISHI TOSHIHIRO) 島根大  
学・大学院総合理工学研究科・教授  
研究者番号 : 00172354

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者  
中村 豪, (NAKAMURA GOU) 愛知工業大学・工  
学部・准教授  
研究者番号 : 50319208