

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 5 年 6 月 28 日現在

機関番号：32678

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2022

課題番号：15K04928

研究課題名（和文）実解析に基づくウェーブレットおよび変動指数をもつ関数空間の研究

研究課題名（英文）A study on wavelets and function spaces with variable exponent based on real analysis

研究代表者

出末 光夫 (Izumi, Mitsuo)

東京都市大学・共通教育部・准教授

研究者番号：80507179

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,500,000円

研究成果の概要（和文）：大きな成果の1つは、野井貴弘氏との共同研究による変動指数Herz空間の研究です。変動指数とMuckenhoupt荷重の両方をもつ関数空間において基本的な作用素の有界性を示す方法を確立しました。また、変動指数をもつ臨海型Herz空間に付随する新たなHardy空間を定義し、その基本性質を明らかにしました。さらに、2つの荷重をもつ変動指数型重み付きHerz空間を定義し、その別ノルムを与え、この関数空間の解析の基礎を築きました。また別の成果として、澤野嘉宏氏、野ヶ山徹氏、野井貴弘氏との共同研究により、局所型変動指数Muckenhouptの荷重とそれに伴う関数空間に関する諸結果を導きました。

研究成果の学術的意義や社会的意義

今後、より多くの自然現象の数学モデル化や工学における諸分野におけるウェーブレット理論や変動指数解析の応用を進めていく上で、その枠組みとなる多様な関数空間が求められることとなります。Herz空間において、変動指数とMuckenhoupt荷重の理論を用いて変動指数型の荷重付きの新たな関数のクラスを複数定義してそれらの性質を明らかにできたこと、実解析における最新の理論ともいえる局所変動指数型Muckenhouptの荷重理論の研究に取り組み、その荷重と変動指数の両方をもつ幾つかの関数空間において一定の成果を得られたことは大変意義があります。

研究成果の概要（英文）：One of the important result is a study on Herz spaces with variable exponents joint work with Professor Takahiro Noi. We have constructed a method which shows boundedness of some fundamental operators on function spaces involving variable exponent and Muckenhoupt weight. In addition, we have defined a new Hardy Space associated to critical Herz spaces with variable exponent and proved some basic properties of the space. Additionally we have defined two weighted Herz spaces with variable exponents and given equivalent norms. As a result, we have constructed a basic analysis method on those spaces. One of the another result is a joint work with Professor Yoshihiro Sawano, Doctor Toru Nogayama and Professor Takahiro Noi, which have obtained several results on local Muckenhoupt weights with variable exponent and corresponding function spaces.

研究分野：実解析

キーワード：ウェーブレット 変動指数 Muckenhouptの理論 BMO

1. 研究開始当初の背景

実解析学の分野において、古くから知られている Muckenhoupt の理論に変動指数解析を取り入れた変動指数 Muckenhoupt の理論の研究が2010年頃から活発に行われるようになってきました。元々の Muckenhoupt の荷重のクラスと比較しながらこの新しい荷重のクラスの性質を究明すること、そしてこの荷重と変動指数をもつ関数空間の特性を明らかにしていくことが求められていました。

一方、複素変数の関数空間の研究においても、変動指数を用いた関数空間の一般化が注目されてきました。研究開始当初、単位円板上の Bergman 空間や BMO 空間、複素平面上の Bargmann-Fock 空間などの関数空間の変動指数を用いた一般化の研究が知られていました。より多くの関数空間あるいは積分不等式に変動指数を導入することにより、複素解析学特有の変動指数解析を進めていくべき時期となっていました。

2. 研究の目的

将来様々な自然現象の数学モデル化、画像解析、信号解析といった応用を実現させていくために、実解析分野において重要なことはその枠組みとして期待される様々な関数空間の性質を明らかにしておくことです。従来の Muckenhoupt の理論だけでなく、最新の変動指数解析の理論も取り入れ、より多くの関数空間を深く追求すること、特に応用へと現実的に繋がるようなウェーブレットを用いた考察を行って具体的な成果を出すことが目的です。

3. 研究の方法

関数空間を調べるにあたっては大きく2つの研究の視点があります。1つは、変動指数関数空間を含む Banach 関数空間、あるいは ball Banach 関数空間といった広い関数空間の視点からの関数空間をとらえることです。もう1つは、変動指数あるいは特殊な荷重をもつ新たなクラスの関数空間を考察するにあたって、従来の既知の結果との比較を入念に行うことです。従来の結果と比べ、自明に成り立つ性質はそのまま生かす、非自明でない性質は証明を与え、成り立たない性質に直面した際はそれを乗り越えるための改善策を別の視点から問題点を見直すことにより研究を深めていきます。この両輪で関数空間の研究を進めてきました。こうした議論を繰り返し、重要な作用素の有界性、関数空間の双対性、稠密性を調べ、それを利用して、別ノルム・別表現を与えることにより関数空間を特徴付け、優れた基底の構成へと成果を繋げていきました。

4. 研究成果

(1) BMO ノルムの一般化

Ho 氏は、一般的な Banach 関数空間のノルムを用いた BMO ノルムの特徴付けについて、自身の Hardy 空間の原子分解の副産物として証明しました。私はこの研究結果に注目し、Hardy-Littlewood の極大作用素の有界性、Banach 関数空間の双対性、そして Rubio de Francia のアルゴリズムを用いたより簡潔な別証明を与えました。さらに澤野嘉宏氏との共同研究により、この BMO ノルムの特徴付けは通常の Banach 関数空間からより一般的な ball Banach 関数空間の場合へ拡張できることも示しました。この結果により、BMO ノルムの特徴付けは通常の Banach 関数空間の枠組みでは扱えなかった特別な Morrey 空間の場合へも適用できることが保証されました。また、澤野嘉宏氏、野井貴弘氏との共同研究により、BMO 空間における重要な不等式である John-Nirenberg の不等式を ball Banach 関数空間の場合へ拡張し、その不等式を用いた BMO ノルムの特徴付けを示しました。

(2) 変動指数型重み付き Herz 空間の研究

野井貴弘氏との共同研究により、変動指数 Herz 空間に荷重をつけた新たな関数空間の定義やその関数空間における種々の作用素の有界性など多くの課題に取り組みました。成果の1つとして、変動指数が1つの Herz 空間に1つの Muckenhoupt 荷重をつけた新たな重み付き変動指数 Herz 空間を定義し、この関数空間において分数積分作用素、あるクラスの本質的平方関数などの作用素の有界性を証明しました。また、変動指数 Herz 空間に関連する新たな関数空間のクラスとして、変動指数をもつ臨海型 Herz 空間に付随する新たな Hardy 空間を定義しました。そして、この関数空間の解析のために必要となる原子分解や双対性といった諸結果を示しました。さらなる新たなクラスとして、3つの変動指数と2つの荷重をもつ変動指数型重み付き Herz 空間を定義しました。Herz 空間には斉次、非斉次の2種類がありますが、それぞれ変動指数が1つ

の臨界型の重み付き Herz 空間と同値なノルムをもつことを示しました。この同値なノルムによる特徴付けにより、この関数空間における BMO 関数を伴う交換子積の有界性を証明しました。この特徴付けはこの関数空間の解析において非常に有用であり、今回の研究における有界性の証明の議論は特異積分作用素やベクトル値不等式などその他の有界性を示す際にも適用可能です。

(3) 複素変数関数と積分不等式

複素変数関数の関数空間の研究の一環として、1 変数複素関数に関する古典的な理論の見直しに取り組みました。その 1 つとして、小山剛史氏との共同研究により、de Branges の定理 (Bieberbach 予想) の証明において重要な役割を果たす Carathéodory の核収束定理の初等的証明を与えました。また、小山剛史氏、野井貴弘氏、竹内達基氏との共同研究では、Bloch の定理に注目し、その定数評価の簡潔な証明を与えました。

また、澤野嘉宏氏、野井貴弘氏との共同研究として、変動指数を伴う複素変数関数空間の研究に取り組みました。その成果として、単位円板上の Bergman 射影、半平面上の Bergman 射影、半平面上の調和射影といった幾つかの重要な作用素について、変動指数を伴うモジュラー不等式を考察した際、その成立は変動指数が定数指数の場合に限ることを示しました。この結果により、実変数関数の場合における既知の結果と同様、複素変数関数についての幾つかの作用素についても、変動指数の議論においては、ノルム不等式とモジュラー不等式との間に決定的な差異が生じることが示されました。

(4) 変動指数型局所 Muckenhoupt 荷重の理論とその荷重をもつ変動指数型荷重付き関数空間の研究

2010 年頃から研究が始まった変動指数型の Muckenhoupt の理論に関して、さらに Rychkov によって提唱された Muckenhoupt の荷重の局所化を取り入れて新しく定義された変動指数型局所 Muckenhoupt 荷重の研究に取り組みました。定数指数の場合と同様に成り立つことや明らかな差異を示しつつ、この荷重の性質やこの荷重を伴う変動指数型重み付き関数空間を考察しました。荷重の性質を考察する過程において、変動指数型 Muckenhoupt のクラスの単調性が示されました。これは定数指数の通常の Muckenhoupt のクラスがもつ重要な性質の 1 つであり、この性質が変動指数の場合に一般化されることにより、考察の対象としている関数空間における議論をより広く深く展開していくことができました。澤野嘉宏氏、野ヶ山徹氏、野井貴弘氏との共同研究により、この荷重をもつ関数空間の中でも特に Lebesgue 空間、Sobolev 空間、Hardy 空間を対象として、それぞれの関数空間に応じた適切な性質をもつウェーブレットを用いて、変動指数に関する適当な条件下で特徴付けや基底の構成を示しました。

(5) 変動指数関数空間を含むより一般的な関数空間のウェーブレットによる特徴付けとモジュラー不等式

中井英一氏、澤野嘉宏氏との共同研究により、変動指数および変動指数型 Muckenhoupt 荷重の両方をもつ変動指数型重み付き Lebesgue 空間の特徴付けに取り組みました。2015 年においては、両者を合わせもつ関数空間に対するウェーブレットを用いた考察というのはこれが初めての試みでした。この関数空間において特異積分作用素の有界性を示し、その結果を応用してウェーブレットによる特徴付けを得ることができました。また、ウェーブレットに関連した直交射影作用素、平方関数についてのモジュラー不等式を考察し、これらの積分不等式が成立するためには変動指数が定数指数でなければならないことを示しました。これは荷重なしの場合における既知の結果の一般化となりました。また、こうしたウェーブレットによる特徴付けの対象をより多くの関数空間へと広げていくことにも取り組みました。その成果として、一般化された Orlicz 関数を用いて定義される Musielak-Orlicz 型の Hardy 空間についての原子分解による特徴付け、そしてウェーブレットによる特徴付けを証明しました。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計19件（うち査読付論文 19件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 15件）

1. 著者名 出未光夫, 野ヶ山徹, 野井貴弘, 澤野嘉宏	4. 巻 -
2. 論文標題 Wavelet characterization of local Muckenhoupt weighted Sobolev spaces with variable exponent	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 CONSTRUCTIVE APPROXIMATION	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00365-022-09573-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 出未光夫, 中井英一, 澤野嘉宏	4. 巻 94
2. 論文標題 Atomic and Wavelet Characterization of Musielak-Orlicz Hardy Spaces for Generalized Orlicz Functions	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Integral Equations and Operator Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00020-021-02672-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 出未光夫, 野ヶ山徹, 野井貴弘, 澤野嘉宏	4. 巻 198
2. 論文標題 Wavelet characterization of local Muckenhoupt weighted Lebesgue spaces with variable exponent	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 1-13
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -
1. 著者名 出未光夫, 野井貴弘	4. 巻 43
2. 論文標題 Two Weighted Herz Spaces with Variable Exponents	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society	6. 最初と最後の頁 169-200
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 出末光夫, 野井貴弘, 澤野嘉宏	4. 巻 268
2. 論文標題 The John-Nirenberg inequality in ball Banach function spaces and application to characterization of BMO	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Inequalities and Applications	6. 最初と最後の頁 1-11
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また, その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 出末光夫, 野井貴弘	4. 巻 292
2. 論文標題 Generalized Besov-Morrey spaces and generalized Triebel-Lizorkin-Morrey spaces on domains	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematische Nachrichten	6. 最初と最後の頁 2212 - 2251
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また, その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 出末光夫, 小山剛史, 野井貴弘, 澤野嘉宏	4. 巻 106
2. 論文標題 Some Modular Inequalities in Lebesgue Spaces with Variable Exponent on the Complex Plane	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematical Notes	6. 最初と最後の頁 229 - 234
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また, その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Mitsuo Izuki, Takeshi Koyama, Takahiro Noi, and Tatsuki Takeuchi	4. 巻 21
2. 論文標題 A simple estimate of the Bloch constant	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Communications in Mathematical Analysis	6. 最初と最後の頁 35-41
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また, その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Mitsuo Izuki, Yoshihiro Sawano	4. 巻 4(62)
2. 論文標題 Characterization of BMO via ball Banach function spaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Vestnik Sankt-Peterburgskogo Universiteta. Matematika Mekhanika. Astronomiya	6. 最初と最後の頁 78-86
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Mitsuo Izuki, Takahiro Noi	4. 巻 11
2. 論文標題 An intrinsic square function on weighted Herz spaces with variable exponent	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Inequalities	6. 最初と最後の頁 799-816
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Denny Ivanal Hakim, Mitsuo Izuki and Yoshihiro Sawano	4. 巻 184
2. 論文標題 Complex interpolation of grand Lebesgue spaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Monatshefte für Mathematik	6. 最初と最後の頁 245-272
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Mitsuo Izuki and Takeshi Koyama	4. 巻 8
2. 論文標題 An elementary proof of the Caratheodory kernel convergence theorem	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Azerbaijan Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 69-85
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Mitsuo Izuki, Takahiro Noi	4. 巻 199
2. 論文標題 Boundedness of fractional integrals on weighted Herz spaces with variable exponent,	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal of Inequalities and Applications	6. 最初と最後の頁 1-16
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Mitsuo Izuki, Takahiro Noi	4. 巻 13
2. 論文標題 Hardy spaces associated to critical Herz spaces with variable exponent	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Mediterranean Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 2981-3013
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Mitsuo Izuki, Takahiro Noi	4. 巻 8
2. 論文標題 The Hardy-Littlewood maximal operator on some critical weighted Herz spaces with variable exponent	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Jaen Journal on Approximation	6. 最初と最後の頁 97-112
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Mitsuo Izuki, Takahiro Noi	4. 巻 11
2. 論文標題 An intrinsic square function on weighted Herz spaces with variable exponent	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Inequalities	6. 最初と最後の頁 799-816
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mitsuo Izuki, Yoshihiro Sawano	4. 巻 4
2. 論文標題 Characterization of BMO via ball Banach function spaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Vestnik St. Petersburg University: Mathematics	6. 最初と最後の頁 78-86
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Mitsuo Izuki, Eiichi Nakai and Yoshihiro Sawano	4. 巻 40
2. 論文標題 Wavelet characterization and modular inequalities for weighted Lebesgue spaces with variable exponent	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Annales Academia Scientiarum Fennica Mathematica	6. 最初と最後の頁 551-571
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Mitsuo Izuki	4. 巻 57
2. 論文標題 Another proof of characterization of BMO via Banach function spaces	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Revista de la Union Matematica Argentina	6. 最初と最後の頁 103-109
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計5件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 1件)

1. 発表者名 出未 光夫
2. 発表標題 ウェーブレット係数による解析関数の特徴付け
3. 学会等名 東京都市大学 調和解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 出未 光夫
2. 発表標題 変動指数解析の近年の発展と課題
3. 学会等名 RIMS共同研究「関数空間の一般化とその周辺」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 出未 光夫
2. 発表標題 Banach 関数空間による BMO ノルムの一般化
3. 学会等名 東京都市大学 調和解析セミナー(招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Mitsuo Izuki
2. 発表標題 Characterization of BMO via Banach function spaces
3. 学会等名 Harmonic Analysis and its Applications in Tokyo 2015(招待講演)(国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 出未光夫
2. 発表標題 An intrinsic square function on weighted Herz spaces with variable exponent
3. 学会等名 調和解析駒場セミナー(招待講演)
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------