2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　元 年　６ 月 ２３ 日現在

機関番号：１５４０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2018

課題番号：１５Ｋ０４９３０

研究課題名（和文）多変数複素関数論から見たリーマン面の接続とスパンの研究

研究課題名（英文）Study of the continuations and the spans of an open Riemann surface in view of the thory of functions of several complex variables

研究代表者

柴　雅和（SHIBA, Masakazu）

広島大学・工学研究科・名誉教授

研究者番号：７００２５４６９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：　研究期間の前半では「複素径数によってある擬凸状領域を形成する開トーラスの族があるとき，個々の開トーラスの双曲的スパンが径数領域上の実数値関数として捉えられるわけだが，それが劣調和である」を示した．後半では　種数が高い場合にもよい領域関数を見出し得るかどうかも問題とした．まず，有限種数開リーマン面の正則な流体力学的微分が定める周期行列を新しい視点から定義・考察し，既知の結果を拡張するとともにその意味を明らかにし，新しい型の周期行列を用いてスパンの概念を新たにした．多変数複素関数論的見地からは，高い種数の開リーマン面上の流体力学的微分の変分公式に進展が見られた．

研究成果の学術的意義や社会的意義

開トーラスが1つだけではなく複素径数とともに変化するとき，個々の開トーラスの双曲的スパンが径数領域上の実数値関数として得られるわけだが，その動きを知ることは非常に興味深い（西野 利雄氏の指摘）．私たちの主成果は，少なくとも種数が1の場合においてこの指摘を具体的に定式化し証明したことで，その意義は大きい．

同様の問題を種数が高い開リーマン面についても扱うために，正則な流体力学的微分が定める周期行列を新しい視点に立って定義・考察し古典的周期行列との類似性や相違点を詳しく調べたが，これは従来行われてこなかった研究の方法で意義深い．たとえばその応用のひとつとして新しい型のスパンの概念が得られた．

研究成果の概要（英文）：In our studies preceding the present project we observed the set of all tori into which a given open torus (= an open Riemann surface of genus one) can be conformally embedded and reached the notion of hyperbolic span of the open torus. It can be viewed as a domain functon so that we have a new problem of studying its dependence on the open torus. One of the main results in this project reads: If a family of open bordered tori varying with the parameter in the unit disk forms a pseudoconvex domain in a two-dimensional complex manifold, then the hyperbolic span is a subharmonic function on the unit disk. A condition for the hyperbolic span to be a harmonic function is also given. Some additional results were obtained in this project, which would be useful to generalize the above mentioned theorem to any open Riemann surfaces of finite genus. We studied in particular the period matrices of holomorphic hydrodynamic differentials on such surfaces and obtained a new type of span.

研究分野：複素解析学

キーワード：リーマン面　等角的埋め込み　流体力学的微分　周期行列　ジーゲル上半空間　スパン　擬凸状領域　変分公式

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．　　研究開始当初の背景

当初の学術的背景のうちで最も直接的なものは代表者が以前に得ていた成果のうちの，
主として次のものである．
1．有限種数の開リーマン面は，その上の流体力学的に意味づけられる有理型関数を仲介として，同じ種数の閉リーマン面の中に等角的に埋め込まれる --- 流体力学的接続の存在．
2．種数 1 の開リーマン面（以下簡単に開トーラスと呼ぶ）の接続となり得る閉リーマン面（トーラス）の全体はそのモジュラスの集合によって完全に特徴づけられる．
3．開リーマン面には（ユークリッド的）スパンと呼ばれる非負の実数が対応づけられ，これは等角写像論や単葉関数論において有用な Schiffer スパンの自然な拡張になっている．
4．開トーラスには，上述のユークリッド的スパンのほかに，面の標準ホモロジー基底に依らずに定まる双曲的スパンと称する量が定義され，古典的な結果に類似あるいは対応する性質のほか，幾つかの新しい特性をもつ．
　このほか，グリーン関数や主関数など開リーマン面上の特徴ある関数や微分について，多変数複素関数論的な手法によって幾つかの変分公式がすでに知られていたこともまた背景の重要な一部をなす．領域関数としての双曲的スパンが同じように多変数複素関数論的によい動きを示すであろうとの西野利雄氏の指摘もまたこの研究課題の強い契機を与えるものであった．
　この課題の思想的背景には次のような古典的話題との深い関係があることもまた指摘に値するであろう．たとえば，等角的埋め込みの研究として「リーマンの写像定理」や「一般一意化定理（等角写像論の基本定理）」などと，また領域関数としてのスパンの考察は古典的な「単葉関数論」あるいは「幾何学的関数論」と，深く関わる．さらにはまた，等角的埋め込みによって開リーマン面の理想境界が閉リーマン面の中で実現されることは，通常の「解析接続の研究」の一般化・抽象化を意味する．

２．　　研究の目的

この課題においては，種数が正かつ有限な開リーマン面のなすある族がたとえば単位円板内を動く複素径数によって与えられていて，しかもその全体が擬凸状領域であるとき，個々の開リーマン面のスパンは径数の関数としてどのような挙動を見せるか，を考察することを主目的とした．とくに，種数１の縁付き開リーマン面の場合に，双曲的スパンの挙動を調べ，その挙動の特徴によって擬凸状領域あるいは開リーマン面族の特徴を導出することを狙った．
　さらなる発展として，種数が 2 以上の一般の開リーマン面からなる族の場合にはどのように進めばよいかについての考察も視野に入れた．この方針を進めるためには，あるいは将来考えるべき問題への準備としても，種数が 2 以上の開リーマン面の接続の全体を把握すること，およびこのような開リーマン面のスパンの新しい定義を模索すること，など扱うべき
問題は多い．これらについての考察もこの課題の潜在的な目的といえよう．具体的には，たとえば流体力学的微分の周期行列やノルムの研究，あるいは流体力学的接続の極値性質の研究，本質的な意義を持つスパンの発見，さらに並行した形で流体力学的微分の変分公式の整備などを挙げることができる．

３．　　研究の方法

この研究課題の遂行は，開リーマン面論と多変数複素関数論とのそれぞれの手法の融合を特徴的な方法としている．前者については与えられた開リーマン面からの等角的埋め込みを許す閉リーマン面の全体を量的に記述するスパンの概念が主役を担うが，その性質や研究の方法を詳しく述べるために必要な「接続」について簡単に説明する．開リーマン面の接続の歴史は古く，誕生からすでにほとんど 1 世紀を経ているが，種数有限な場合に限っても厳密な定義の上に立って接続を捉えることはなされてこなかった．代表者の研究手法の特徴のひとつは，接続の定義をリーマン面の位相的構造に着目して行うことであり，もうひとつは接続を定める等角的埋め込みのうちで際立った特性をもつものを開リーマン面の理想境界の近傍における挙動を用いて描き出すことにあった．その結果，接続の全体が明確な形で把握されるようになるが，さらに，古典的なスパンに相当する新しい量が領域関数として有用であることを示す．後者については擬凸状領域の概念が重要である．具体的にいえば，縁付き開リーマン面の族を考えてそこでの新しいスパンの動きを調べることになる．その際の方法は，流体力学的微分の変分公式をまず証明し次に族が擬凸状領域であることを利用して新しいスパンの多変数複素関数論的な性質を調べるというものである．
　とくに，種数が 1 の場合について正確な定式化と厳密な証明を与える．ここまででこの研究課題の主目的は達せられた，その後はその拡張・一般化を目指して，種数が 1 より大きな開リーマン面の上で正則な流体力学的微分によって定まる周期行列の新しい定義し，それを応用して接続の全体をより深く把握することを目指すことになる．変分公式の拡張もまた重要な方法である．

４．　研究成果

この研究課題において目的としたところは，簡潔にいえば「有限種数開リーマン面のスパンを領域関数として捉えるとき，それが開リーマン面の変化とともにどのように動くか」という問題を扱うことであった．具体的に考えるべき問題は多岐にわたるが，少なくともこれまでに得てきた種々の結果（研究の背景欄を参照）がこの問題の本質的部分への重要な手がかりを与えることは，研究目的欄においても詳しく述べたように，疑う余地がない．また．研究方法欄において述べたように，基礎的である場合としてわけても重要なのは，種数が１の有限リーマン面（コンパクトな縁つき開リーマン面の内部）の場合である．しかしこの場合でさえ，従来から研究されてきたことではないから，まず問題を厳密に定式化し，次にその主張の証明を与えることが求められたわけだが，それは研究期間の前半においてほぼ完全に達成された．すなわち，種数が１であることを有効に利用した双曲的スパンを擬凸状領域を形成する開リーマン面の族について考えることによって，たとえば双曲的スパンの劣調和性やそれが調和になる場合の族（あるいは擬凸状領域）の特徴づけなどが証明された．この結果は山口・濱野両氏との共著論文としてすでに公表されている．

研究計画の次の段階は，上の結果の吟味や拡張などについての考察を試みることであった．これには明らかに多くの点で新しい困難が伴う．たとえば開リーマン面の種数が１を超えることによってその接続の全体は種数が１の場合に比べてはるかに複雑になる．また，双曲的に考えられたスパンもそのままでは通用しなくなる．これらの問題を詳しく考察し，たとえ部分的にではあっても解決することは，この研究課題の当初からの目的にも計画にも含めてあったし，それ自身としても非常に意義深いものである．この問題に関する成果は次のようである．

リーマン面論の立場からは，有限種数開リーマン面の正則な流体力学的微分が定める周期行列を新しい視点に立って定義・考察し，閉リーマン面についてよく知られた周期行列との類似性や相違点を詳しく調べた．とくに，与えられた開リーマン面の接続の全体について以前に示した結果を拡張するとともにその意味を明らかにした．新しい型の周期行列を用いてスパンの概念を一般化した．接続の全体については，別の重要な話題との関連でも，増本氏とともに新しい方向に踏み込みつつある．また，スパンについてのより具体的な研究も行った．一方，多変数複素関数論的見地からは，高い種数の開リーマン面上の流体力学的微分の変分公式に進展が見られた．これらの成果は，本報告書の作成時点においては．学会講演など口頭での発表が主で，それらを論文の形として公表するのにはもう少し時間を要する．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　3 件）

[1] Hamano, S., M. Shiba and H. Yamaguchi: Hyperbolic span and pseudoconvexity, Kyoto J．Math．57(2017), 165-183. （査読あり）
[2] Hamano, S.: Log-plurisubharmonicity of metric deformations induced by Schiffer and harmonic spans,Math. Z. 284(2016), 491-505.（査読あり）
[3] Masumoto, M.: Holomorphic mappings of once-holed tori. J. d'Anal.Math. 129 (2016), 69-90. （査読あり）

〔学会発表〕（計　3８件）

[1] 柴 雅和：リーマン面の"closings" --- 平面領域に関する古典的問題とその多変数函数論的な意義, ---．第 58 回函数論シンポジウム，2015 年 10 月 11 日，松江市
[2] Shiba, M.: The period matrices of the closings of an open Riemann surface. 平成 27 年度等角写像論・値分布論研究集会，2015 年 12 月 5 日，山口大学
[3] 柴 雅和・山口 博史；開リーマン面の閉リーマン面への等角的埋め込み --- 周期行列の値域 ---．日本数学会，2016 年 9 月 16 日，関西大学
[4] 柴 雅和：複素速度ポテンシャルと開リーマン面の closings. 北海道大学・月曜解析セミナー，2016 年 10 月 24 日
[5] 柴 雅和：The period matrices of the closings of an open Riemann surface of finite genus. Riemann Surfaces and Discontinuous Groups, 2017 年 1 月 7 日，東北大学
[6] 柴 雅和・山口 博史：開リーマン面の閉リーマン面への等角的埋め込み--- Closings と流体力学的周期行列．日本数学会，2017 年 9 月 11 日，山形大学
[7] 柴 雅和：複素速度ポテンシャルとリーマン面の closings. 名城大学ポテンシャル論セミナー，2017 年 12 月 8 日，名城大学.

[8] 柴 雅和：開リーマン面の closings} --- 周期行列の複素正規化と方向モジュラスおよびそれらの応用．日本数学会，2018 年 9 月 24 日，岡山大学

[9] Shiba. M.: Closings and the span of an open Riemann surface of finite genus. 研究集会「Prospects of theory of Riemann surfaces」,2018 年 12 月 2 日，山口大学

[10] 伊藤 雅明・柴 雅和・幡谷 泰史：双曲空間における Poiseuille 流の構成．日本数学会中四国支部例会，2018.年 1 月 21 日，山口大学

[11] 伊藤 雅明･米谷 文男･柴 雅和：対称水平截線領域の Schiffer span の動き．日本数学会，2019 年 3 月 17 日，東京工業大学

[12] 山口 博史：双曲的スパンと擬凸状領域，相川弘明先生還暦記念研究集会，2016 年 2 月 1 日，北海道大学

[13] 山口 博史：Variation formulas of the hyperbolic spans in the pseudoconvex domain. 東北複素解析セミナー， 2019 年 2 月 20 日

]14] 濱野 佐知子・柴 雅和・山口 博史：双曲的スパンと擬凸状領域について．日本数学会，2015 年 3 月 24 日，明治大学

[15] 濱野 佐知子：流体力学的微分の変分公式とその応用について，2015 年度多変数関数論冬セミナー,2015 年 12 月 27 日,京都大学

[16] 濱野 佐知子：Variational formula for L_s-canonical semi-exact differential and application. 日本数学会，2015 年 9 月 15 日，京都産業大学

[17] 濱野 佐知子・柴 雅和・山口 博史：有限種数の開リーマン面が誘導するモジュライ円板と擬凸領域．日本数学会，2016 年 9 月 15 日?18 日，関西大学+++++-

[18] Hamano, S.:Variational formulas for hydrodynamic differentials and applications. Seminar on Complex Analytic Geometry, July 1, 2016, Pohang Univ. Sci. Tech.

[19] 濱野 佐知子： 流体力学的微分の変分公式とその応用について．第 59 回函数論シンポジウム, 2016 年 10 月 9 日, 静岡県男女共同参画センター

[20] 濱野 佐知子：種数有限の開リーマン面が誘導するユークリッドスパンと擬凸領域．東大数理・複素解析幾何セミナー, 2016 年 11 月 14 日

[21] Hamano, S.: The moduli set of closings of an open Riemann surface and pseudoconvexity. Prospects of Theory of Riemann surfaces, 2016 年 12 月 2 日，山口大学

[22] 濱野 佐知子：流体力学的微分の 2 階変分公式とその応用について．ポテンシャル論セミナー, 2017 年 6 月 16 日.名城大学

[23] Hamano, S.: Variation of the moduli disk for closings of an open torus under pseudoconvexity. Seminar Inst. Adv. Math. Res., September 5, 2017, Univ.Strasbourg

[24] 濱野 佐知子：Variation of the a-span of an open Riemann surface and pseudoconvexity. リーマン面・不連続群論研究集会，2018 年 2 月 11 日，名古屋大学.

[25] 濱野 佐知子：有限種数開リーマン面の a-スパンと擬凸領域．日本数学会，2018 年 3 月 19 日，東京大学

[26] Masumoto, M.: Holomorphic mappings of once-holed tori. 幾何与分析系列講座之八十八, 2015 年 8 月 19 日，中国科学技術大学

[27] 増本 誠： Spaces of compact continuations of Riemann surfaces. 数学系学術報告, 2016 年 8 月 30 日，南京大学

[28] Masumoto, M.: Once-holed tori embedded in Riemann surfaces. 数学与信息技術学院学術報告, 2016 年 8 月 31 日，江蘇第二師範学院

[29] Gouma, T., M. Masumoto, and M. Shiba: Conformal embeddings of Riemann surfaces --- closings and extremal lengths. Prospects of theory of Riemann surfaces 研究集会，2016 年 12 月 2 日，山口大学

[30] Masumoto, M.:Compact continuations of Riemann surfaces (2) --- case of higher genus. 華僑大学数学講壇系列講座第二百零七講，2017 年 7 月 26 日

[31] 増本 誠： Measured foliations and compact continuations of Riemann surfaces. 大阪市立大学複素解析セミナー，2017 年 10 月 20 日

[32] Masumoto, M. and M. Shiba: Spaces of compact continuations of Riemann surfaces. Prospects of theory of Riemann surfaces, 2017 年 12 月 1 日，山口大学

[33] 増本 誠：Compact continuations, quadratic differentials and measured foliation. 名城大学ポテンシャル論セミナー，2017 年 10 月 27 日

[35] 増本 誠：Measured foliations and compact continuations of Riemann surfaces. リーマン面・不連続群論研究集会，2018 年 2 月 11 日

[36] 増本 誠： Weldings of Riemann surfaces with quadratic differentials. 東工大複素解析セミナー 2018 年 6 月 20 日

[37] 増本 誠：Ioffe rays of spaces of compact continuations of Riemann surfaces. 名城大学ポテンシャル論セミナー，2018 年 11 月 9 日

[38] Masumoto, M.: On uniqueness of compact continuations of Riemann surfaces. Prospects of theory of Riemann surfaces, 2018 年 12 月 2 日

〔図書〕（計　0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

○取得状況（計　0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織

(1)研究分担者
①　研究分担者氏名：　山口　博史
ローマ字氏名：　Yamaguchi, Hiroshi
所属研究機関名：　滋賀大学
部局名：　教育学部
職名：名誉教授
研究者番号（8 桁）：20025406

②　研究分担者氏名：　濱野　佐知子
ローマ字氏名：　Hamano, Sachiko
所属研究機関名：　大阪市立大学
部局名：　大学院理学研究科
職名：　准教授
研究者番号（8 桁）：10469588

③　研究分担者氏名：　増本　誠
ローマ字氏名：　Masumoto, Makoto
所属研究機関名：　山口大学
部局名：　大学院創成科学研究科
職名：　教授
研究者番号（8 桁）：50173761

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。