様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　３ 年　５ 月 ２１ 日現在

機関番号：１７１０２

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2020

課題番号：１５Ｋ０４９３２

研究課題名（和文）ニュートン多面体を用いた特異点解消とその解析学への応用

研究課題名（英文）Resolution of singularities by using Newton polyhedra and its application to analysis

研究代表者

神本　丈（Kamimoto, Joe）

九州大学・数理学研究院・准教授

研究者番号：９０３０１３７４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：特異点論などで非常に重要な概念であるニュートン多面体を用いて、定量的な特異点解消定理を発展させた。これらを、多変数複素解析学や調和解析学において重要な問題に応用し、多くの興味深い成果を得た。具体的には、局所ゼータ関数の解析接続の問題や振動積分の漸近挙動に関する問題、ダンジェロの型の定量的な決定などの問題について成果を多く得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義
代数や幾何における重要な成果をさらに発展させ応用することにより、今までに十分でなかった解析学における重要な問題について、多くの成果を得たこと。

研究成果の概要（英文）：By using Newton polyhedra, which is an important concept in singularity theory,
we developed a quantitative resolution of singularities theorem. Furthermore, we apply the resolution theorem to several complex variables and harmonic analysis and obtain many kinds of interesting results. To be more specific, we obtain strong results about the analytic continuation of local zeta functions, asymptotic analysis of oscillatory integrals and determination of D'Angelo's types.

研究分野：多変数複素解析学

キーワード：ニュートン多面体　特異点解消定理　ベルグマン核　ダンジェロの型　代数曲線　振動積分　局所ゼータ関数

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

代数幾何学等の分野で重要で有名な広中の特異点解消定理が，1970 年前後に，M. Atiyah 等により解析学のある重要な問題に応用され，強い結果が得られたことは，当時としては驚くべき出来事であったに違いない．それ以来，特異点解消定理が，多くの重要な解析の問題に有用な道具となったことは，多くの研究が示すところであり，現在も盛んにこの種の定理の応用により，多くの成果が得られ続けている．解析の問題において望まれる結果は，多くが定量的なものであり，広中の定理のような抽象的な特異点解消定理だけでは，不十分である．その後，A. Varchenko らにより発展を遂げた，ニュートン多面体を用いた特異点解消の解析学への応用は，扱う関数に厳しい条件を付ける必要はあるものの，非常に有用なものであり，以下に詳しく説明するように，特に調和解析学における多くの発展をもたらした．

調和解析学や特異点論などにおいて，振動積分の無限遠点での挙動を調べることは，非常に重要な問題である．この問題は，相関数の特異点論的な性質に深く関連している．非退化特異点の場合には，モースの補題により，相関数が非常にきれいな形に表されるため，フレネル積分を用いた計算により詳しい状況がわかる．退化した特異点の場合については，相関数をどのように表示すればよいかがまだ一般的には理解されていないが，Varchenko の研究以来，すでにより多くの充実した成果が得られている．特に，近年の E. M. Stein を中心とした実解析グループの研究は，調和解析の多くの問題に著しい進展をもたらしている．2 次元の場合には，望ましい座標系の構成に関して，かなり詳しい結果が得られており，そのおかげで，振動積分の問題に関しても，深く理解されるようになった．しかし，座標系の取り方に関する研究すら，一般にはまだ十分とは言えない状況であり，調和解析学において重要な作用素のレギュラリティーに関する問題の多くはまだ手付かずの状態にあった．

一方，振動積分の問題に深く関連する問題として，局所ゼータ関数に関する解析接続の問題がある．局所ゼータ関数はディリクレ級数と深い関係があり，整数論の分野においても興味深い研究対象である．局所ゼータ関数の極の分布はメラン変換を通して，振動積分の漸近展開と相関関係が深い．そのため，上で述べた振動積分の研究に類似する形で，局所ゼータ関数の研究も進展してきており，問題点も類似している．

さらに，このニュートン多面体の概念は，調和解析学や特異点論だけでなく，多変数複素解析学にも応用されるべきものであることは，当然期待されることであるが，研究開始当初は，多くの研究があったとは言えない状態であった．また，上に述べてきた問題に関して，これまでに得られてきた結果は，特異点解消定理を用いることから，関数に関して実解析性という仮定が最低でも必要となってきた．これを，研究開始当時においては，応用上可微分関数まで弱めることが強く望まれる状態であった．

２．研究の目的

上で説明した研究の状況を鑑みて，以下のように，研究を二つの分野に分けて，それらの目的について説明する．

（１）振動積分・局所ゼータ関数に関する研究

これらの研究はすでに，ニュートン多面体を用いた特異点解消定理の応用により，多くの成果が得られていることは先に述べている．新たな問題として，特に，本研究で試みたのは，関数の仮定を可微分関数まで弱めた場合のそれまでの研究の自然な一般化である．

本研究において，まず注目すべき成果として，可微分関数の場合において，局所ゼータ関数が極でないような特異点を持つという非常に奇妙な現象を見つけたことがある．この現象は，振動積分の漸近展開に関しては，その展開が途中で壊れてしまうことに対応する．その際に重要となるのは，平坦関数の解析である．平坦関数はニュートン多面体の情報には現れないものであり，解析が非常に困難であるが，興味深い未知な研究対象である．これらに関する理解が多くの目的となった．

（２）多変数複素解析学に関する研究

境界の滑らかな擬凸領域上の正則関数の境界挙動を調べることは，例えばレビ問題など，多変数複素解析学において非常に重要な問題である。さらに，その挙動の中に見つけられる解析的な不変量を，境界の幾何学的な不変量で記述するという問題は興味深いものであり，現在盛んに研究されている．具体的に本研究で考えてきた問題を列挙すると以下のようになる．

●実超曲面に関する様々な不変量（D'Angelo や Catlin の型等）の定量的な決定，
●ベルグマン核とセゲー核の境界挙動に関する定量的な解析，

●ベルグマン核とセゲー核の境界上の滑らかさに関する解析,
●様々な不変計量（ベルグマン，小林，カラテオドリー，ケーラー・アインシュタインなどの計量）の境界挙動に関する定量的な評価,
●正則 Peak 関数の構成,
●Squeezing 関数の境界挙動,
●複素多様体上の正則直線束の冪空間に関するベルグマン関数の漸近展開.

私の研究では，ニュートン多面体を用い，その領域の境界の代数幾何学的・特異点論的な解析を通して，正則関数の境界挙動を定量的な意味で明らかにすることを大きな目標とする．また，この研究と関連して，複素幾何や偏微分方程式論に関する問題も考える． 特異点論的な視点が重要となる研究の対象は，境界のレビ形式が退化している場合，すなわち弱擬凸領域の場合である．
強擬凸領域は適切な正則座標をとることにより，局所的に非常にきれいな形に表されることから，上に挙げた問題に関して，すでに十分満足できる解決をみている．ところが，「強」擬凸性の仮定をはずした単に擬凸の場合（弱擬凸の場合），きれいな表示は一般的には知られておらず、このこと自体が深刻な問題である．したがって，まず根本的に考えるべき問題として，次は重要である：「実超曲面(領域の境界)がきれいに表示されるように，適切な（局所）正則座標系を与えよ.」実際に，``きれいな形''で領域が局所的に表示される場合には，すでに上の多くの問題に関して、強い結果が得られている．例えば，準斉次な多項式で近似されるように表示される擬凸領域の場合(セミレギュラーと呼ばれる場合)，非常に詳しい成果が得られる．このクラスは，2 次元，凸状など多くの重要な弱擬凸な場合を含んでいる．しかし，より一般の場合には，退化の構造がよく解らないため，よい座標系を見つけることを大きな目的とする.

３．研究の方法

本研究における重要な戦略は，ニュートン多面体という概念を用いて，特異点論的な手法により，解析に有用となる座標系を導入し，さらに上に述べた具体的な諸問題を考えることである．実空間における議論は，上で説明したように，すでに先行研究が多くあるので，それを参考にしながら，複素空間の研究に一般化していく．まず，実超曲面に関して十分その情報を含むようにニュートン多面体という概念を導入する．ニュートン多面体は非常に座標に依存してしまうため，「ニュートン非退化」という条件をどのように導入するかが鍵となる．私の導入した「非退化」は，その条件そのものが，適切な座標系の条件になっており，結果としてその座標の上で，様々な解析が可能となった.
さらに，局所ゼータ関数や振動積分の解析には，最近実解析学の世界で有用な道具となっている，ヴァン・デル・コルプットの補題を用いた.

４．研究成果

（１） 局所ゼータ関数の解析接続に関する成果を特に詳しく解説したい．これに関連する振動積分の成果もあるが，ここではその詳細について省略させて頂く.
正則に，または有理型に拡張される領域を決定するために，次のふたつの量 h(f)，m(f)を導入する.

h(f):=sup{t>0:局所ゼータ関数が領域 Re(s)>-t まで正則拡張される}
m(f):=sup{t>0:局所ゼータ関数が領域 Re(s)>-t まで有理型拡張される}

容易に解ることであるが，h(f)，m(f)は座標変換に関して不変である．まず，h(f)については，f のニュートン多面体から定量的に決まることが，M. Greenblatt により示された．すなわち，d(f)を adapted coordinate に関するニュートン距離とするとき，h(f)=1/d(f)が成り立つ．すなわち，正則拡張に関する問題は，満足する形で解決されている.
次に有理型拡張に関する不変量 m(f)について考える．f が実解析的に滑らかな場合には，広中の特異点解消定理を用いれば，m(f)は無限大となり，局所ゼータ関数のすべての極は負の実軸上に存在する，ことが示される．さらに，その極の位置や位数は，Varchenko により，f のニュートン多面体の幾何学的な性質から定量的に計算されることもわかっている．最初の極は，s=-h(f)=-1/d(f)に存在する.
f の実解析性の仮定を除いた上で，局所ゼータ関数する問題を考える．ある条件の下では，実解析的な場合の Varchenko の結果と同様な結果が得られるが，単に f が可微分という条件だけでは，局所ゼータ関数が必ずしも全平面へ有理型関数として解析接続されることはない，という深刻な問題が生ずることが本研究により発見された． ただ，その特異性に関しては，まだあまり詳しいことが解っていない．いずれにしても，m(f)が有限になる場合があることが解ったので，普遍量 m(f)の値を，f の情報で記述するという興味深い問題を得るに至った.

さらに一般に，上で述べた反例の関数を一般化した次のクラスの関数

$f(x,y)=u(x,y)x^a\ y^b$ + (原点で平坦な関数)，

(ただし，$u(0,0)>0$ をみたし，a,b は正の整数で $a>b$ とする）に関して，$m(f)>1/a$ が成立し，さらに，$Re(s)>-1/a$ における極は，$\{-j/b:j$ は自然数$\}$に含まれる，ということを示した．評価 $m(f)>1/a$ はある意味において最良のものである．

一般に，局所ゼータ関数の解析接続に関する解析においてカギとなるのは，関数 f の零点集合の幾何学的な理解である．実解析的である場合は，変数を複素に拡張することにより，f を正則関数とみなすことができ，その零集合は，複素空間内の平面曲線と呼ばれる長い間非常によく調べられ，これほどよく理解されている数学的対象はないであろう．実際に，この成果は，局所ゼータ関数の研究にも非常に有効に活かされており，トーリック多様体の理論などから，局所ゼータ関数の極に関して，多くの定量的な成果が得られる．

さて，可微分関数の場合であるが，この場合は，複素に拡張する場合には，変数の共役も考えなくてはならず，零集合の幾何学的な性質はとても複雑になるし，現在までにそのような研究は少ないように思われる．そこで，その部分集合で，「曲線」らしい重要な情報を持つだろうある幾何学的対象を数学的に定義し，この「曲線」を可能な限り，素朴なブローアップを有限回繰り返すことにより，きれいな形にできる限りもっていく，というのが作戦である．最終的には，「特異点解消」により構成された可微分多様体上，曲線は局所的に上の形に表されることが示され，先に行った解析が適用できるというわけである．結局，この議論から，定量的にどのような情報から，有理型解析接続できる範囲が決まるかも自然に理解でき，著しく一般的な成果を得ることができた．この結果は，現在，新しい論文においてまとめている最中である．

（２） 次に，多変数複素解析学における研究成果について説明を行う．先に述べた「ニュートン非退化」の条件を満たすような座標系をもつような実超曲面に関して D'Angelo の型に関して正確な結果を得ることができた．また，本研究において最も強く興味を持って取り組んだ問題は，ベルグマン核の境界挙動の解析である．特別な場合に関してではあるが，ベルグマン核の挙動についてはニュートン多面体を用いて分類することにより，それぞれの場合に関して最良の結果を得た．また，いずれの場合にも特異性の強さは，ニュートン距離により表されることがわかった．

このように，多変数複素解析学に特異点論的なアイデアを導入することにより，それまで未解決であった多くの問題が解決され，多くの先行研究が統一的に理解されるようになった．複素空間におけるニュートン多面体の応用は，まだはじまったばかりであり，今後さらに精密な議論を経て発展していくべきものである．この研究期間においては，研究の目的で述べた他の問題には，十分な成果が得られなかったが，今後の研究に向けて非常に多くのアイデアを得ることができたので，今後さらに多くの成果を得ることが期待される．

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計12件（うち査読付論文　8件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　9件）

１．著者名 Kamimoto Joe、Nose Toshihiro	４．巻 372
２．論文標題 Nonpolar singularities of local zeta functions in some smooth case	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Transactions of the American Mathematical Society	６．最初と最後の頁 661～676
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/tran/7771	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

１．著者名 Kamimoto Joe、Nose Toshihiro	４．巻 278
２．論文標題 Meromorphy of local zeta functions in smooth model cases	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Journal of Functional Analysis	６．最初と最後の頁 108408～108408
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.jfa.2019.108408	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

１．著者名 Kamimoto Joe	４．巻 －
２．論文標題 Newton polyhedra and order of contact on real hypersurfaces	５．発行年 2020年
３．雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	６．最初と最後の頁 －
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

１．著者名 Kamimoto Joe	４．巻 －
２．論文標題 A sufficient condition for equality of regular type and singular type of real hypersurfaces	５．発行年 2021年
３．雑誌名 数理解析研究所講究録	６．最初と最後の頁 －
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

１．著者名 Joe Kamimoto	４．巻 ー
２．論文標題 A sufficient condition for equality of regular type and singular type fo real hypersurfaces	５．発行年 2019年
３．雑誌名 数理解析研究所講究録	６．最初と最後の頁 ー
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 J. Kamimoto and T. Nose	４．巻 B63
２．論文標題 Asymptotic limit of oscillatory integrals with certain smooth phases,	５．発行年 2017年
３．雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	６．最初と最後の頁 101-112.
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 J. Kamimoto and T. Nose	４．巻 23
２．論文標題 Toric resolution of singularities in a certain class of C^∞ functions and asymptotic analysis of oscillatory integrals,	５．発行年 2016年
３．雑誌名 J. Math. Soc. Univ. Tokyo	６．最初と最後の頁 425-485
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 J. Kamimoto and T. Nose	４．巻 368
２．論文標題 Newton polyhedra and weighted oscillatory integrals with smooth phases	５．発行年 2016年
３．雑誌名 Trans. Amer. Math. Soc.	６．最初と最後の頁 5301-5361
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 J. Kamimoto and T. Nose	４．巻 B57
２．論文標題 On asymptotic expansions of oscillatory integrals with smooth phase in two dimensions	５．発行年 2016年
３．雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	６．最初と最後の頁 141-157
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 J. Kamimoto and T. Nose	４．巻 63
２．論文標題 Asymptotic limit of oscillatory integrals with certain smooth phases	５．発行年 2017年
３．雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	６．最初と最後の頁 101-112
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Joe Kamimoto and Toshihiro Nose	４．巻 144
２．論文標題 On meromorphic continuation of local zeta functions	５．発行年 2015年
３．雑誌名 Proceedings of KSCV10, F. Bracci et al. (eds.)	６．最初と最後の頁 187--195
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Joe Kamimoto and Toshihiro Nose	４．巻 ー
２．論文標題 On asymptotic expansions of oscillatory integrals with smooth phase in two dimensions	５．発行年 2016年
３．雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	６．最初と最後の頁 ー
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

〔学会発表〕　計16件（うち招待講演　12件／うち国際学会　2件）

1．発表者名 神本　丈
2．発表標題 無限型擬凸領域のベルグマン核の境界挙動
3．学会等名 第54回函数論サマーセミナー
4．発表年 2019年

1．発表者名 神本　丈
2．発表標題 多変数関数論におけるニュートン多面体とその応用
3．学会等名 日本数学会2019年度秋季総合分科会，特別講演（招待講演）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Kamimoto Joe
2．発表標題 Meromorphy of local zeta functions in smooth model cases
3．学会等名 研究集会「超局所解析と漸近解析」（招待講演）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Kamimoto Joe
2．発表標題 On meromorphy of local zeta functions
3．学会等名 研究集会「第15回代数・解析・幾何学セミナー」（招待講演）
4．発表年 2020年

１．発表者名 神本丈，　野瀬敏洋
２．発表標題 局所ゼータ関数の有理型解析接続可能領域について
３．学会等名 日本数学会2020年度春季総合分科会
４．発表年 2020年

１．発表者名 神本　丈
２．発表標題 Regular and singular orders of contact on real hypersurfaces.
３．学会等名 第５３回函数論サマーセミナー
４．発表年 2018年

１．発表者名 神本　丈
２．発表標題 Non-polar singularities of local zeta functions in smooth cases.
３．学会等名 日本数学会2018年秋季総合分科会
４．発表年 2018年

１．発表者名 神本　丈
２．発表標題 Regular and singular orders of contact on real hypersurfaces.
３．学会等名 代数解析学の諸問題ー超局所解析及び漸近解析ー（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 神本　丈
２．発表標題 ニュートン多面体と重みつき振動積分
３．学会等名 第２２８回　広島数理解析セミナー（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 神本　丈
２．発表標題 Newton polyhedra and order of contact on real hypersurfaces.
３．学会等名 複素解析幾何セミナー（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 神本　丈
２．発表標題 ニュートン多面体と振動積分の漸近解析　I，II
３．学会等名 筑波RCMS解析学シンポジウム（招待講演）
４．発表年 2019年

１．発表者名 神本　丈
２．発表標題 ベルグマン核の漸近解析，　2017年9月6日.
３．学会等名 第52回函数論サマーセミナー（招待講演）
４．発表年 2017年

１．発表者名 Joe Kamimoto
２．発表標題 Failure of meromorphy for local zeta functions,
３．学会等名 RIMS 共同研究（公開型）「超局所解析と漸近解析」（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2017年

１．発表者名 神本　丈
２．発表標題 ニュートン多面体を用いた特異点解消とその解析学への応用
３．学会等名 研究集会「接触構造、特異点、微分方程式及びその周辺」（招待講演）
４．発表年 2018年

１．発表者名 Joe Kamimoto
２．発表標題 On analytic continuation of local zeta functions
３．学会等名 研究集会「New development of microlocal analysis and singular perturbation theory」（招待講演）（国際学会）
４．発表年 2016年

１．発表者名 神本　丈
２．発表標題 Asymptotic analysis of oscillatory integrals and local zeta functions
３．学会等名 研究集会「保存則をもつ偏微分方程式に対する解の正則性・特異性の研究」（招待講演）
４．発表年 2015年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計0件

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関