

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 5 月 31 日現在

機関番号：32601

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04935

研究課題名(和文) 確率最適制御に対する臨界性理論の発展と応用

研究課題名(英文) The expansion of the criticality theory for stochastic optimal control and its applications

研究代表者

市原 直幸 (ICHIHARA, Naoyuki)

青山学院大学・理工学部・准教授

研究者番号：70452563

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題では、粘性Hamilton-Jacobi方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式に対する臨界性理論について、確率最適制御理論と偏微分方程式論の手法を用いて考察した。具体的には、確率最適制御問題に現れる一種の「相転移」現象が粘性Hamilton-Jacobi方程式の一般化主固有値と密接に関係することを明らかにし、方程式の空間次元や非線形性の強度が相転移現象にどのように影響するのかを、ある程度定量的な形で評価した。

研究成果の概要(英文)：In this research, we studied the criticality theory for a class of nonlinear partial differential equations, called viscous Hamilton-Jacobi equations, by using both probabilistic and PDE theoretic methods. More specifically, we clarified the relationship between “phase transition” phenomena arising in stochastic optimal control and the generalized principal eigenvalue for viscous Hamilton-Jacobi equations. We especially quantified such phase transitions in terms of the space dimensions as well as the intensity of nonlinearity of the equation.

研究分野：確率論

キーワード：確率最適制御

1. 研究開始当初の背景

線形偏微分作用素に対する臨界性理論については、関数解析やポテンシャル論、あるいは確率論に基づいた詳細な研究がこれまでも知られていた。一方で、本研究課題で対象とする粘性 Hamilton-Jacobi 方程式に対する臨界性理論については、本研究代表者による幾つかの基礎的研究を除いては未解明の状況にあった。また、臨界性理論の確率最適制御理論による考察は、これまでになかった問題意識だと思われる。

2. 研究の目的

本研究では、確率最適制御問題に現れる一種の「相転移」現象の解明を目的とする。具体的には、評価基準汎関数に含まれる実数パラメータの値がある臨界値を超えると、最適値の変化率や最適軌道の再帰性などの最適制御に関わる定性的な性質が大きく変化することを、幅広いモデルに適用可能な一般的な枠組みで証明する。

3. 研究の方法

本研究では、粘性 Hamilton-Jacobi 方程式の解の諸性質を、確率論と非線形偏微分方程式論の双方の手法を用いて調べる。特に前者では、確率最適制御理論の立場からの考察を試みる。

4. 研究成果

本研究期間を通して得られた主要な結果を、年度ごとに述べる。

まず、平成 27 年度では、2 次より真に大きな非線形項を持つ粘性 Hamilton-Jacobi 方程式の臨界性理論について詳しく考察し、以下の結果を得た。

(a) 指数無限大における極限問題。

粘性 Hamilton-Jacobi 方程式の非線形項の指数が無限大に発散するとき、もとの方程式に対するエルゴード問題の一般化主固有値は、

ある勾配拘束 (gradient constraint) 付きの粘性 Hamilton-Jacobi 方程式に対するエルゴード問題の一般化主固有値に収束することを示した。

(b) 極限方程式に対する臨界性理論。

前項で導出した極限方程式に対するエルゴード問題について、方程式に含まれるパラメータを変化させるとき、ある臨界値を境に方程式の解の定性的な性質が大きく変化することを示した。この種の臨界性は極限操作を行う前の方程式にも現れることが知られているが、臨界値が正になるための必要十分条件を非線形指数の値ごとに比較した。その結果、非線形項の指数が 2 より真に大きいときは、空間が 2 次元以上であることが臨界値が正になるための必要十分条件であることがわかった。さらに、極限方程式においては任意の空間次元で臨界値が正になることがわかった。指数がちょうど 2 の場合は、空間が 3 次元以上であることが臨界値が正になるための必要十分条件となることが知られているので、粘性 Hamilton-Jacobi 方程式の臨界値は非線形項の指数と方程式の空間次元に大きく依存していることがわかった。

平成 28 年度は、粘性 Hamilton-Jacobi 方程式に対する臨界性理論に関連して、その離散版である Markov 決定過程に対するエルゴード問題を考察した。具体的には、可算無限集合を状態空間とし、推移確率を制御パラメータとする離散時間の Markov 連鎖に対して、与えられた報酬関数に応じて得られる利得から推移確率を変更することにより発生する費用を差し引いた正味の値の期待値を、長時間平均の意味で最大化する問題 (エルゴード問題) を扱った。この問題に付随する最適性方程式は非線形差分方程式に対する固有値問題の形をとり、上述のエルゴード問題に対する最適値および最適戦略 (最適制御) は、この固有値問題の一般化主固有値

と固有関数により特徴付けられることが知られている。本研究では、これらの値を有限時間区間の最適性方程式の解を用いて近似する問題(いわゆる value iteration)を考察し、以下の結果を得た。

(a) 初期関数に対する十分緩い仮定のもとで、固有値問題の一般化主固有値は有限時間区間の解により近似することができる。

(b) 初期関数がある程度良いクラスから選べば、固有値問題の一般化主固有関数は有限時間区間の解により近似することができる。

(c) エルゴード問題が拘束条件を持つ場合は、有限時間区間の解は拘束条件を持たない場合と異なる挙動を示す。

これらの結果は、最適化問題の費用関数が特別な場合には、乗法型エルゴード定理と呼ばれる一連の極限定理に対応し、本研究ではその非線形拡張を行ったとみることでもできる。

平成 29 年度は、内向きのドリフト項と優線形のハミルトニアンを持つ粘性ハミルトン・ヤコビ方程式に関する諸性質について考察し、以下の 3 つの問題について新たな結果を得た。

(a) エルゴード問題に対する解の存在と一意性。

一種の非線形固有値問題である粘性ハミルトン・ヤコビ方程式のエルゴード問題に対して一般化主固有値の概念を導入し、一般化主固有値に対応する固有関数の存在と(定数差を除く)一意性を示した。また、この固有関数から定まる拡散過程のエルゴード性を示した。

(b) 有限時間区間および無限時間区間の確率最適制御問題による特徴付け。

エルゴード問題の一般化主固有値が、エルゴード型確率最適制御問題の値関数として特徴付けられることを示した。また、有限時間区間の確率最適制御問題に対して、時

間区間が増大していくときの値関数の漸近挙動について考察した。その結果、極限関数としてエルゴード問題の一般化主固有値に対する固有関数が現れることがわかった。

(c) ポテンシャル項の摂動に対する一般化主固有値の漸近挙動。

無限遠方で減衰するポテンシャル項に対して、一般化主固有値の値がポテンシャル項に含まれるパラメータに関してどのような挙動を示すのかについての評価式を得た。特に、一般化主固有値の増大度に関して、内向きドリフト項の強さ、ハミルトニアンを増大度、ポテンシャル項の減衰の速さ、の 3 つの要素の依存度を定量的に評価することができた。

以上の結果により、確率最適制御問題に対する臨界性理論について複数の観点から新たな知見を得ることができた。一方で、非局所型の方程式に対する臨界性理論については未解明な部分が残ったため、今後の継続課題としたい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

(1) E. Chasseigne and N. Ichihara, Qualitative properties of generalized principal eigenvalues for superquadratic viscous Hamilton-Jacobi equations, *Nonlinear Differential Equations Appl. NoDEA* 23(6) 1-17 (2016) (査読あり), DOI: 10.1007/s00030-016-0422-x

(2) N. Ichihara, Phase transitions for controlled Markov chains on infinite graphs, *SIAM J. Control Optim.* 54(2) 450-474 (2016) (査読あり), DOI: 10.1137/140998202

[学会発表](計 9 件)

(1) N. Ichihara, Ergodic problems for viscous Hamilton-Jacobi equations with inward drift, 新潟確率論ワークショップ, 新潟大学(2018)

年)

(2) N. Ichihara, Ergodic problems for viscous Hamilton-Jacobi equations with inward drift, Markov Processes and Related Fields, 福岡大学(2018年)

(3) N. Ichihara, Qualitative properties of generalized principal eigenvalues for viscous Hamilton-Jacobi equations, Nonlinear PDE for Future Applications --Optimal Control and PDE--, 東北大学(2017年)

(4) N. Ichihara, Stochastic optimal control and partial differential equations, 東北大学数学教室談話会, 東北大学(2017年)

(5) N. Ichihara, Criticality theory for stochastic optimal control, 岡山--広島 解析・確率論セミナー2017, 岡山大学(2017年)

(6) N. Ichihara, Generalized principal eigenvalues for superquadratic viscous Hamilton-Jacobi equations, 2016 Workshop on Stochastic Control and Financial Applications, Hong Kong Polytechnic University (2016年)

(7) N. Ichihara, The generalized principal eigenvalue for viscous Hamilton-Jacobi equations with superquadratic Hamiltonians, Asymptotic problems for partial differential equations and viscosity solutions, 京都大学数理解析研究所(2015年)

(8) N. Ichihara, 粘性 Hamilton-Jacobi 方程式の一般化主固有値と確率最適制御, 京都大学数学教室談話会, 京都大学(2015年)

(9) N. Ichihara, Phase transitions arising in some stochastic optimal control problems, 東京確率論セミナー, 東京大学(2015年)

〔その他〕

ホームページ等

<https://sites.google.com/site/naoyukiichihara/home>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

市原 直幸(ICHIHARA, Naoyuki)
青山学院大学・理工学部・准教授
研究者番号: 70452563