

令和 2 年 6 月 10 日現在

機関番号：33919

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04939

研究課題名(和文) 核解析によるポテンシャル論の新展開

研究課題名(英文) New development of potential theory by kernel analysis

研究代表者

鈴木 紀明(suzuki, noriaki)

名城大学・理工学部・教授

研究者番号：50154563

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：放物型作用素の正值解の構造を調べて、楕円型方程式のマルチン境界の決定を行なった。放物型ポテンシャル論を含めてマルチン境界とショッケ境界の関連性が少し見えてきた。また、 α -放物型作用素の作るベルグマン空間とハーディ空間におけるテープリッツ作用素とカルレソン測度の関係、およびそれらの有界性、コンパクト性、有限性などについて整理することができた。さらに、実軸上の重み付き多項式近似に関しては、エルデス型の重みについてのいくつかの結果を得ることができた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ポテンシャル論の立場から見ると放物型作用素と楕円型作用素は深く関連するが、今回の研究を通して改めてその事実を再認識した。楕円型方程式のグリーン関数は放物型方程式の基本解を時間に沿って積分して得られる。この事実をうまく用いて、楕円型方程式のマルチン境界の記述に成功した。また、 α -放物型作用素から定まるベルグマン空間は $\alpha=1$ のときは熱方程式の解、 $\alpha=1/2$ のときは調和関数となり、熱方程式とラプラス方程式を統一して解析する。また、エルデス型の重みについての多項式近似では基本となる評価式に重みから定まる関数のべきが必要であることがわかり、べきの最良性など新たな課題が見つかった。

研究成果の概要(英文)：By studying the structure of positive solutions of a parabolic differential operator, we determine the Martin boundary for its related elliptic operator. We know a relation between Martin boundary and Choquet boundary in the framework of parabolic potential theory. We study Bergman and Hardy type spaces for α -parabolic operators. It is clear that a relation between Toeplitz operators and Carleton measures. We show when they are bounded, compact or finite rank. Moreover, we obtain some new estimates for the weighted polynomial approximation on real line with Erdos weights.

研究分野：ポテンシャル論

キーワード：ポテンシャル論 放物型ベルグマン空間 放物型ハーディー空間 テープリッツ作用素 重み付き多項式近似

様式 C-19、F-19-1、Z-19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 正值調和関数を積分表示するためにグリーン核の商により定義されるマルチンコンパクト化を行うと、境界には一般には非極小点が現れる。マルチン境界の研究では非極小点が存在すると解析が極端に難しくなる。最近、直積型領域のマルチン境界の決定問題を解決したが、これは以前の研究では仮定した非極小点が存在しないという条件を取り除いたものである。その際にはグリーン関数の種々なる精密な評価が重要であった。実は積分表示という目的には非極小な部分は不要である。「この一見無駄に思える部分が何故に表れるのか」の研究は代表者の積年の課題である。特に、境界点の分類は放物型作用素を扱う放物型ポテンシャル論で顕著になる。熱方程式の解などの具体的な場合に非極小点がどのように現れるかについて興味がある。

(2) 代表者は、上半空間における放物型作用素に対するベルグマン空間を定義してその基本性質を調べてきた。その後、ベルグマン核の微分を含めた評価式を基にして、カルレソン埋め込みとテープリッツ作用素の有界性、コンパクト性さらにはシャッテン族の分類などの成果を得ている。また、最近、放物型ハーディ空間についてのカルレソン埋め込みの有界性についての結果を発表した。課題としては、種々の作用素のコンパクト性については $p=2$ の場合しかできていないことである。これまでの研究蓄積を活かしてヒルベルト空間でない場合 ($p=2$ でない) についての研究に着手することにした。ポテンシャル論では調和関数に代表される楕円型方程式の解を主に取り扱うが、放物型方程式の解も重要な研究対象である。楕円型との類似性と差異性の探究は興味深い問題であり、ポテンシャル論の発展に不可欠である。放物型作用素は $\alpha=1/2$ のとき、通常の調和ベルグマン空間になり、 $\alpha=1$ のときは熱方程式であるから、ラプラス方程式と熱方程式を統一して解析するものであり、 α に関する依存性の追求から放物型ポテンシャル論の新しい知見が期待できる。

(3) ラグランジュの補間定理やワイエルシュトラスの近似定理など、多項式近似の研究の歴史は古いが、初期の研究対象は有界閉区間であった。1980年代に入って、ラクマノフ、マスカ、ザッフが、実軸全体での重み付きの直交多項式の研究に対数核ポテンシャルの理論が有効であることを見つけ、実軸全体での重み付きの多項式近似の理論が飛躍的に前進した。元々、対数核ポテンシャル論に関しての容量、超越直径、フェケテ多項式などの研究は知られていたが、彼らは重み付きでの容量などの概念をうまく実軸全体での多項式近似に応用したのである。この際に重要になるのはどんな重みを考えるかである。重みを一般化するにはより厳密な対数核ポテンシャルの評価が必要になる。重みは無遠点での挙動の緩急によって、フロイド型とエルデス型に分類される。これまでにフロイド型に関する研究は種々知られているが、エルデス型については未知の問題が多いのが現状である。代表者は3年程前からエルデス型の重みに関する研究を始めて、フロイド型で知られている結果のいくつかを一般化させることに成功した。今回の研究を機により組織的な体制で臨み、エルデス型への拡張だけでなく、新たな対象の研究を展開することにした。特に、次元の高い空間での多項式近似を行うためには多重ポテンシャル論における対数核の理論を進展させる必要がある。

2. 研究の目的

本研究は核解析の側面からポテンシャル論の新展開を目指すものであり、上記の3つのテーマについて、それぞれ、グリーン核、ベルグマン核、対数核のより精密な評価を主体にして進めた。これらの研究は偏微分方程式、確率論、関数解析などの分野とも深く関係するが、核解析の進化・発展はポテンシャル論と他の分野のより深い結び付きを与える。具体的には研究期間内に以下のことを明らかにする。

- (1) 熱方程式に関するマルチン境界とショック理論との関係の解明。
- (2) マルチン境界の非極小点の自然な理解。
- (3) 上半空間で考察した α -放物型作用素の一般領域での考察
- (4) $p=2$ でない場合の放物型ベルグマン空間と放物型ハーディ空間上のテープリッツ作用素のコンパクト性の特長付け。
- (5) エルデス型の重みに関するドゥラバレーサン平均による微分を含めた近似理論。
- (6) 多重調和関数理論の多変数の多項式近似への応用

3. 研究の方法

研究目的に記した諸問題の研究を並行して進めて解決を図った。新たな手法の開発やそれぞれの課題で得られる結果の相互関係を探り、総合的なポテンシャル解析の新展開を探求する。関連する論文や専門書を利用しての日々の研究が中心であるが、研究協力者との議論は重要である。代表者は数年前から名城大学でポテンシャル論セミナーを主宰している。これは近隣の関数論研究者を中心に10名ほどが毎週金曜日の午後集まって研究成果の発表や論文紹介を行うものである。このセミナーには学外の研究協力者も可能な範囲で参加していて、このセミナーをより充実させて、本研究計画の遂行の一助とした。特に、専門知識を得るために外国の研究者も含めた、他大学の研究者をこのセミナーの講師として招いた。

マルチン境界関係では共同研究の実績のある研究者との連絡を密接にするとともに、ショック理論の基礎文献を参考に、熱方程式に関するショック境界の概念を明白にしてマルチン境界

の理論との融合を目指した。

-放物型作用素については、まずは、 $p=1$ の場合の -放物型ハーディ空間の双対空間の構造を調べる。古典的な調和ハーディ空間では共役調和関数のノルム評価が必要であったので、まずは共役の概念の確立が重要である。学外研究協力者との勉強会を年に数回行った。

重み付き多項式近似については、学内の研究協力者と毎週の定期セミナーを実施した。エルデス型の重みに関する対数核ポテンシャルの解析を進展させて、直交多項式によるフーリエ級数のドゥラバレーサン平均の微分を込めた近似評価を得た。

定期セミナー、勉強会及びポテンシャル論セミナーでの議論を地道に積み上げて着実な成果を出した。関心を持つ研究者からの批判や質問は研究進展に不可欠である。国内外の関連する研究集会に積極的に参加して、本研究の成果発表の機会を持った。

4. 研究成果

マルチン境界とショック境界の関係は抽象論としては繋がってきたが、具体例の構成の成果は十分でない。ただし、アプローチの仕方に新たな知見を得た。一般に、楕円型作用素のグリーン関数は対応する放物型作用の基本解の時刻に関する積分で得られる。グリーン関数の商を直接に解析するより、放物型作用素の基本解を経由しての解析の方がより精密であることがわかった。情報量が多いからである。このアプローチの考えを一般化して、より多くの場面で使えるようにしたい。

-放物型作用素の作るベルグマン空間とハーディ空間におけるテープリッツ作用素の解析とカルレソン測度については一定の成果が得られ整理が出来つつある。また、新たに2変数のハーディ空間のテープリッツ作用素に関する不変部分空間の構造について一つの結果を得た。これは古典的な1変数ハーディ空間のシフト作用に関する有名なボイリングの定理に刺激されたことであるが、2次元では複雑な状況が発生して課題も多いが興味深い。

重み付き多項式近似に関してはいくつかの成果が発表できた。主な結果はドゥラバレーサン平均は可積分な関数の多項式近似になるが、関数が絶対連続ならば、ドゥラバレーサン平均の導関数が元の関数の導関数のよい多項式近似になっている。また、与えられた可積分関数が有界変動のとき、フーリエ級数は一様収束することもわかった。これらはエルデス型重みでは新しい結果である。解析の難しかった点は、エルデス型の場合は重みから決まるある関数のべきが評価の到るところに現れることであった。フロイド型ではこの関数が有界なので評価が容易だったのである。評価に現れているべきは最良であると考えているが、その証明は今後の課題である。これまでは実軸全体での重み付き多項式近似を考えていたが、最近では、ラゲール重みのような半直線での近似を考察して若干の成果を得ている。これは多項式近似についての新しい課題である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計6件（うち査読付論文 6件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 K. Itoh, R. Sakai, N.Suzuki	4. 巻 48
2. 論文標題 Uniform convergence of orthogonal expansions for exponential type weights	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Hokkaido Math. J.	6. 最初と最後の頁 263-280
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 K. Itoh, R. Sakai, N.Suzuki	4. 巻 70
2. 論文標題 Exponentially weighted polynomial approximation for absolutely continuous functions	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Tohoku Math. J.	6. 最初と最後の頁 1-15
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 H.Nakagawa and N. Suzuki	4. 巻 46
2. 論文標題 Carleson inequalities on parabolic Hardy spaces	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Hokkaido Math. J.	6. 最初と最後の頁 1-14
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 H.Nakagawa and N.Suzuki	4. 巻 2
2. 論文標題 Boundedness of Toeplitz operators on parabolic Hardy spaces	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Linear and Nonlinear Analysis	6. 最初と最後の頁 229-235
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Itoh, R. Sakai and N. Suzuki	4. 巻 2015
2. 論文標題 The de la Vallee Poussin mean and polynomial approximation for exponential weight	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 International J. of Analysis.	6. 最初と最後の頁 1-8
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) http://dx.doi.org/10.1155/2015/706930	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 K. Itoh, R. Sakai and N. Suzuki	4. 巻 47
2. 論文標題 An estimate for derivative of the de la Vallee Poussin mean	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Math. J. Ibaraki Univ.	6. 最初と最後の頁 1-18
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件 (うち招待講演 4件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 鈴木紀明
2. 発表標題 対数ポテンシャルと重み付き多項式近似
3. 学会等名 第54回函数論サマーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 鈴木紀明
2. 発表標題 Polynomial solutions to Dirichlet problem for the heat equation
3. 学会等名 第12回 AIMS (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 鈴木紀明
2. 発表標題 放物型Bergman空間上のToeplitz作用素の有界性について
3. 学会等名 第7回岐阜数理科学研究会（招待講演）
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 中村豪
2. 発表標題 Dirichlet問題に対する熱多項式解
3. 学会等名 2017年度日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 鈴木紀明
2. 発表標題 Carleson inequalities for L^α -harmonic functions
3. 学会等名 The fifth International Symposium on Banach and function spaces 2015（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 鈴木紀明
2. 発表標題 多項式近似とポテンシャル論
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会, 函数論分科会（招待講演）
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

名城大学工学部数学教室鈴木研究室
<https://ccmath.meijo-u.ac.jp/~suzukin/>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----