

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 12 日現在

機関番号：33919

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04940

研究課題名(和文) 超汎関数空間論の新展開と無限次元確率解析及び量子力学系理論への応用

研究課題名(英文) New development of theory of generalized functionals, an infinite dimensional stochastic analysis and applications to theory of quantum dynamical system

研究代表者

齊藤 公明 (Saito, Kimiaki)

名城大学・理工学部・教授

研究者番号：90195983

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,800,000円

研究成果の概要(和文)：超汎関数空間論の新展開，それに基づく無限次元確率解析とその応用研究に従事した．顕著な成果として下記を挙げる．積が自然に定義される超関数空間から超汎関数空間を構成し，その上に高次レヴィラプラシアン積の積分表現を得た．更に無限次元ブラウン運動の冪を点とする超関数のみならず確率微分方程式を導いた．この方程式はランダム方向微分を含む今までにないものとなっている．時点独立確率過程に関する確率積分法を確立し，Doob-Meyer型分解定理の証明に成功した．無限次元超関数のS変換に対しテスト汎関数空間の核型性が必要十分条件であることを証明した．長年未解決であった問題に解答を与えた画期的なものである．

研究成果の概要(英文)：We researched new developments of theory of generalized functionals, an infinite dimensional stochastic analysis based on the theory, and its applications. We obtained remarkable results: We constructed spaces of generalized functionals from new spaces consisting of distributions that are closed in the product of distributions, and also obtained an integral expressions of the higher order Levy Laplacians. Moreover, we obtained a SDE including random directional differentiations induced from the delta distribution centered at powers of an infinite dimensional Brownian motion. We initiated the new method of stochastic integral for instantly independent stochastic processes, and proved the Doob-Meyer type decomposition theorem. We proved that the nuclearity of the space of test functionals for infinite dimensional distributions is a necessary and sufficient condition for a characterization of the S-transform. The result is the breakthrough as an answer for an unsolved problem.

研究分野：確率解析学

キーワード：無限次元確率過程 超関数空間 超汎関数空間 無限次元ラプラシアン ホワイトノイズ理論 力学系理論 量子確率過程 数理ファイナンス

1. 研究開始当初の背景

申請者齊藤はホワイトノイズを基に一つの無限次元解析を研究し続けている。この分野は日本で創始され、主に名古屋の研究グループ、海外ではドイツ、米国を中心に研究されてきた分野である。量子確率論、分子生物学、経路積分法、情報理論、経済学等への応用の広さから、各界の研究者達から注目され、様々な方向に研究が展開されてきた。米国数学会の Mathematical Review から 60H40: White Noise Theory なる登録番号も与えられ、国際的に一つの理論分野として認められるに至っている。ゆらぎを含んだ現象をホワイトノイズの観点から連続無限独立変数の汎関数とみなして、超汎関数の空間を構成し、その空間の解析を行なうものである。本研究の研究協力者として、長年共同研究を続けてきたイタリアローマ第一大学の L. Accardi 教授、米国ルイジアナ州立大学の H.-H. Kuo 教授に依頼した。

申請者齊藤は特に、ホワイトノイズ超汎関数空間に働くある種の作用素を基に新しい確率解析として、無限次元解析を展開し続けている。これまでに無限次元確率過程の構成方法における新しい展開を論文にまとめ、いくつかの成果を得ていた。研究分担者の三町はエルゴード理論に詳しく、その数論への応用や画像情報への応用の研究を続けている。また、符号力学系において、記号変換に関するエントロピーの研究を行ない、成果をあげていて、量子情報へ展開することが可能になることが予想されていた。

Accardi 氏の率いる量子確率論のグループとの国際交流が盛んに行われ、ホワイトノイズ理論は極微の現象を記述する量子ホワイトノイズ理論へと急速に発展してきた。特に、申請者と Ji 氏の共同研究によるレヴィの無限次元ラプラス作用素の生成する確率過程の構成法の研究および、申請者と Accardi, Ji の共同研究による無限次元ラプラス作用素の一般化とその生成する確率過程の構成法の研究は、ホワイトノイズ理論に新しい展開を与える。これらの研究に基づき、Accardi 氏との更なる新しい共同研究が始まり、その発展として、本理工学部とヴォルテラ研究所との共同研究協定を結ぶに至り、成果を継続して出し続けてきた。

また Kuo 氏とは抽象 Wiener 空間上の無限次元ラプラシアン共同研究を量子論への拡張も含めて継続していた。

2. 研究の目的

本研究の目的は、確率論、解析学、グラフ理論、数論、計算機科学のそれぞれの専門分野から総合的に応用に適した無限次元確率解析を共同研究し、その立場からの量子化法、さらに量子情報解析として新しいアプローチを展開することにある。特に、最近新しく構成した超汎関数空間上である種の無限次元ブラウン運動の冪が繰り込み無しで定義

でき、この下で無限次元確率解析を構築する。この解析では量子物理での発散問題の解決が期待できる。そのために必要な一般化されたレヴィラプラシアンに基づいた確率解析を整備し、量子力学系理論などへの関連付けを念頭におき、理論展開を試みる。この作用素は無次元ブラウン運動のある種の高次微分を生成する。この立場からホワイトノイズ超汎関数理論の新展開も行なう。

3. 研究の方法

代表者齊藤は主に超汎関数空間論の構成、無限次元確率解析の観点から量子情報論へのアプローチを、分担者三町は量子力学系理論、数論的確率論への応用を試みた。特にレヴィラプラシアン、その一般化に基づいた確率解析を中心として、量子場の理論における発散量 (0) の数学的定式化を主な目標とおき、その関連のセミナー、研究会

- 1) 無限次元確率解析、作用素解析関係
- 2) 偏微分方程式論、超汎関数論 (特に、Yang-Mills 方程式に関する話題)
- 3) 量子確率論、量子情報論関係
- 4) 力学系理論、数論などへの応用
- 5) 海外との共同研究

等の開催により研究を進めた。これらの内容ではホワイトノイズを確率変数の素子と考えることにより、一貫して研究を進めることができた。ホワイトノイズ微分が消滅作用素、その共役作用素が生成作用素の役割を果し、量子ホワイトノイズ、量子ブラウン運動をこの無限次元確率解析の立場から記述することができる。この立場から相互の関連を深めながら、研究集会および共同研究を進めた。海外との共同研究は、主に、申請者齊藤、研究協力者 Accardi, Kuo により、量子情報解析としてのホワイトノイズ作用素解析を議論し、問題点提起、論文作成を行なった。また、Yang-Mills 場のレヴィラプラシアンに基づいた確率解析による表現に関して議論し、問題提起および成果をまとめ上げた。更に、新しい確率積分法を提唱し、ニア・マルティンゲールの理論を打ち立てた。三町、齊藤により、符号力学系の量子エントロピーの研究を行い、問題提起および成果をまとめた。加えて、計算機実験に基づくアルゴリズムの開発を行なった。

・国外からの招待者 (レヴュ - 依頼):

三年間のうち、ロ - マ大学 L. Accardi 教授 (イタリア)、ルイジアナ州立大学 H.-H. Kuo 教授 (米国)、ローマ大学 R. Monte 教授 (イタリア)、韓国忠北国立大学 U.C. Ji 教授、などに依頼した。

・計算機 (設備) 関係:

本研究においては、ホワイトノイズと汎関数微分方程式を考察することや、力学系理論、数理物理、特に、量子化として、ファインマン経路積分の超汎関数論的計算法、確率過程量子化法、量子カオス論、量子計算への応用、経済学 (特にファイナンス) への応用も含み、

量子情報解析としての無限次元確率解析，ホワイトノイズ理論の展開を行なったため，数値解析，数式処理等計算機数学的手法も逐次利用して研究した．ホワイトノイズをいろいろなデバイスに入力し，その出力をウィナー展開，ヴォルテラ展開などの核関数を求め，可視化するシステムをより精密に構築することを念頭におき，準備をした．そのための画像解析ソフトを購入した．

4．研究成果

(1) 無限次元超関数の S -変換に対して解析的特徴付け定理を与え，その証明に成功した．ある種の解析的かつ増大条件のもとにホワイトノイズテスト関数空間の核型性が S -変換の必要十分条件になる成果は長年得られていなかった問題を解決したものである．(学術論文)

(2) 超関数同士の積について閉じている局所凸空間を構成し，その空間上に作用する汎関数及び超汎関数空間上の無限次元ラプラス作用素について議論した．この超関数空間上では無限次元ブラウン運動の冪やホワイトノイズの冪も繰り込み無しで考えることができ，理論面のみならず応用面においても広範囲に研究が可能になった．今後，この空間上で更なる研究発展が期待される．(学術論文)

(3) 伊藤積分理論の拡張として新しい確率積分理論の構築し，更に near-martingale の概念を導入し，Doob-Meyer 式の分解定理を導いた．(学術論文)

(4) 適合確率過程及び時点独立確率過程の双方に対し統一した確率積分法を導入し，伊藤の公式を双方の確率過程を含む定義域上で成立させることに成功した．この一般公式により，今までの伊藤の公式が適用範囲外であった現象にまで考察することが可能になり，更に，指数過程の導入により，新しい確率積分を含む確率微分方程式論を構築することに成功した．(学術論文)

(5) 離散分布に従う移民付きの Galton-Watson 分枝過程の推移確率行列の三角化分解法を与え，この確率過程の極限分布を得ることに成功した．計算機によるアルゴリズムの開発も行なった．本研究から派出して，充足可能性問題についてのアルゴリズム開発，ホワイトノイズ入力によるデバイス研究などに向けて検討を進めている．(学術論文)

(6) レヴィラプラシアンを定義する際に基盤となるチェサロ定理に関し，オーダーを高次化して高次レヴィラプラシアンに拡張可能とし，連続化をすることにより，その高次ラプラシアンの連続表現を得ることに成功した．更に，正のオーダーに関するチェサロ

定理を証明することが出来，このラプラシアンに基づく無限次元確率解析を展開する基盤を整備した．(学術論文)

(7) 研究成果(2)の発展として，(2)における超汎関数空間上で，レヴィラプラシアン，ヴォルテララプラシアンの積分表現を得ることができ，量子エルゴード定理との関連性を示唆する成果に繋がった．更に，無限次元ブラウン運動の冪を中心とした超関数のみならず超汎関数空間値の確率微分方程式を導出した．これはランダム方向の微分作用素を含む他に類のない方程式となっている．この理論の更なる発展が期待される．(学会発表)

5．主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

(雑誌論文)(計 6 件)

Luigi Accardi, Un Cig Ji, Kimiaki Saitô: “Analytic characterizations of infinite dimensional distributions”, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, World Sci. Pub. Co. 査読有, Vol.20, No.2, pp.1750007-1 - 1750007-13 (2017)
DOI: 10.1142/S0219025717500072

Hui-Hsiung Kuo, Kimiaki Saitô, Yusuke Shibata: “The product of distributions and white noise distribution-valued stochastic differential equations”, *Communications on Stochastic Analysis, Serials Publications*, 査読有, Vol. 10, No. 2, pp.163 - 184 (2016).

Chii-Ruey Hwang, Hui-Hsiung Kuo, Kimiaki Saitô, Jiayu Zhai: A general Itô formula for adapted and instantly independent stochastic processes, *Communications on Stochastic Analysis, Serials Publications*, 査読有, Vol.10, No.3, pp.341 - 362 (2016)

Hui-Hsiung Kuo, Kimiaki Saitô: “Doob's decomposition theorem for near submartingales”, *Communications on Stochastic Analysis, Serials Publications*, 査読有, Vol.9, No.4, pp. 467 - 476 (2015)

Yoshinori Uchimura and Kimiaki Saitô: “Asymptotic Behavior of the Bernoulli Type Galton-Watson Branching Process with Immigration”, *Random Operators and Stochastic Equations* Walter de Gruyter GmbH & Co. KG, Vol.23, No.1, pp.1 - 10
DOI 10.1515/rose-2014-0024

Luigi Accardi, Un Cig Ji and Kimiaki

Saitô : “Higher order multi-dimensional extensions of Cesàro Theorem”, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics, World Sci. Pub. Co., 査読有, Vol. 18, No. 4, pp.1 - 15 (2015)
DOI: 10.1142/S0219025715500307

〔学会発表〕(計6件)

Kimiaki Saitô: “Remark on a construction of a stochastic process generated by the exotic Laplacian.”, Joint research on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, Chungbuk National University, August 25—29, Korea, Invited Talk (2017)

Kimiaki Saitô: “Powers of white noise associated with the product of distributions”, 38th International conference on Infinite Dimension Analysis, Quantum Probability and Related Topics QP 38 Tokyo University of Science, October 2 - 6, p. 15, Invited Talk (2017)

Kimiaki Saitô: “An infinite Dimensional Brownian motion and the product of distributions”, Joint research on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, Chungbuk National University, Korea, Invited Talk (2016)

Kimiaki Saitô: “The product of distributions and infinite dimensional stochastic processes”, 12th Sendai Workshop on Non-commutative Stochastic Analysis and Applications, Tohoku University, p. 3 (2016)

Kimiaki Saitô: “Powers of an infinite dimensional Brownian motion associated with the product of distributions,” 11th Sendai Workshop on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, Tohoku University, p.3 (2015)

Kimiaki Saitô: “Infinite dimensional Laplacians and powers of white noise”, Joint research on Infinite Dimensional Analysis and Quantum Probability, Centro Vito Volterra, Italy, Invited Talk (2015)

〔図書〕(計1件)

原祐子, 齊藤公明, 内村佳典: 『工学系の基礎 確率統計15週』, 学術図書出版社 (2016)
総ページ数 (本体 87 ページ; 別冊解答 46 ページ)

〔産業財産権〕

出願状況 (計0件)

取得状況 (計0件)

〔その他〕

特になし.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

齊藤 公明 (SAITO, Kimiaki)
名城大学・理工学部・教授
研究者番号: 90195983

(2) 研究分担者

三町 祐子 (MIMACHI, Yuko)
名城大学・理工学部・准教授
研究者番号: 00218629

(3) 連携研究者

市原 完治 (ICHIHARA, Kanji)
名城大学・理工学部・教授
研究者番号: 00112293

(4) 連携研究者

尾畑 伸明 (OBATA, Nobuaki)
東北大学大学院・情報科学研究科・教授
研究者番号: 10169360

(5) 連携研究者

日比野 雄嗣 (HIBINO, Yuji)
佐賀大学・工学系研究科・准教授
研究者番号: 50253589

(6) 研究協力者

ルイジ アカルディ (ACCARDI Luigi)
ローマ第 大学・経済学部・教授

(7) 研究協力者

郭 輝雄 (KUO Hui-Hsiung)
ルイジアナ州立大学・理学部・教授