

平成 30 年 6 月 1 日現在

機関番号：34504

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04942

研究課題名(和文) 曲面に関連した特異積分とトリーベル・リゾルキン空間の研究

研究課題名(英文) Study of singular integrals and Triebel-Lizorkin spaces associated to surfaces

研究代表者

藪田 公三 (YABUTA, KOZO)

関西学院大学・数理科学研究センター・客員研究員

研究者番号：30004435

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：核関数の半径方向の変化度を示す函数 $h(t)$ と曲面 $\{x = (|y|)\}$ あるいは $\{(y) = (y, (|y|))\}$ に関連した特異積分について、トリーベル・リゾルキン空間からトリーベル・リゾルキン空間への有界性、およびベゾフ空間からベゾフ空間への有界性について、いくつかのよい結果を得た。関連したベクトル値特異積分であるマルチンキエヴィッチ積分あるいは多重線形特異積分においても同様の結果を得た。それらを含め、14件の成果を得た。これらは特異積分の研究進展に寄与するものである。

研究成果の概要(英文)：For singular integrals with kernel associated to the surface of the form $\{x = (|y|)\}$ etc, we obtained several good estimates in Triebel-Lizorkin spaces and Besov spaces. We published 14 results for singular integrals with rough kernel, vector space valued singular integrals, multilinear singular integrals, and maximal singular integrals. These contribute to the development of the study of singular integrals.

研究分野：数学

キーワード：調和解析 フーリエ解析 実解析 函数解析

1. 研究開始当初の背景

は n 次元ユークリッド空間 R^n から d 次元ユークリッド空間 R^d への写像で、 (y) は R^n の単位球面上の可積分関数で積分平均 0 、 $h(t)$ は 1 変数関数として、曲面 $\{(x,y) \in R^n \times R^d; x = (y)\}$ に関連した特異積分 $T_{\{\Omega, \Phi, h\}} f(x) = p.v. \int_{R^n} \frac{h(|y|)\Omega(y)f(x-\Phi(y))}{|y|^{n-d}} dy, x \in R^d$ において $d=n, h=1, \Phi(y)=y$ の場合が、1950 年代に Calderon と Zygmund によって考察されたもので、理論の美しさだけではなく偏微分方程式論に有効に応用された。以来 Calderon-Zygmund の特異積分論として有名で、特異積分論は調和解析の重要な分野として発展してきた。

- (i) $d=n, \Phi(y)=\Psi(|y|)y/|y|,$
- (ii) $d=n+1, \Phi(y)=(y, \psi(|y|)),$
- (iii) $(y)=(P_1(y), P_2(y), \dots, P_d(y)),$
ただし、 $P_j(y)$: 多項式

などの場合で、 h がある種の条件を満たしていれば、 $T_{\{\Omega, \Phi, h\}}$ は $T_{\{\Omega, \Phi, 1\}}$ と同じような $L^p(R^n)$ 有界性などのよい性質持っていることについて、多くの研究がある。

科研費基盤研究(C)(平成 23-26 年度)での「曲面に関連した特異積分の研究」において、 $T_{\{\Omega, \Phi, h\}}$ の L^p 連続性を保証するのに、

(1) の粗さは $L^1(S^{n-1})$ にどの程度プラスアルファすればよいのか。

(2) $h(t)$ にどの程度の自由度があるのか。

(3) $P_j(y)$ にどの程度の自由度があるのか。

を追求してきた。その過程で得た結果として、

(1) について新しい函数クラス $WF_{\beta}(S^{n-1})$ を得た。(2) については、 $L^p_{loc}(0, \infty)$ で表される函数クラスを取り扱い、

(3) については、 $d=n+1$ で回転型の場合に、 $T_{\{\Omega, \Phi, h\}}$ の L^p 連続性のみならず、斉次トリベール・リゾルキン空間での連続性を得ることができた。

これは $n=d$ の通常の場合でも既知の結果をかなり改良するもので、より深く研究すべきものと考えた。

(iii) の場合で、 h がある種の条件を満たしていれば、 $T_{\{\Omega, \Phi, h\}}$ は $T_{\{\Omega, \Phi, 1\}}$ と同じような L^p 有界性などのよい性質を持っていることについて、多くの研究がある。

しかし、トリベール・リゾルキン空間での連続性についての研究はそう多くはない。

それでも $H^1(S^{n-1})$ に属する場合にはいくつかの結果があり、またリトルウッド・ペーリー作用素、とくにマルチンキエヴィッチ積分作用素についての研究があった。こういった背景を踏まえ、この分野はまだまだ研究すべきであると考えた。

2. 研究の目的

先ず第一に、すでに成功している(ii)の場合の研究を更に進め、(i)の場合の研究を行うのを第一の目的とする。

第二に、(iii)の場合で $WF_{\beta}(S^{n-1})$ の場合の研究。

第三に、特異積分の L^p 有界性について Grafakos-Stefanov のクラス $F_{[q]}(S^{n-1})$ があるが、このクラスと我々のクラス $WF_{\beta}(S^{n-1})$ の包含関係をより明確にしたい。

第四に、リトルウッド・ペーリー作用素、とくにマルチンキエヴィッチ積分作用素について、知られている結果が非斉次トリベール・リゾルキン空間しか扱えていないので、斉次トリベール・リゾルキン空間を扱えるようにすることを目指す。澤野と藪田は斉次トリベール・リゾルキン空間から L^p への連続性を得ているが、斉次トリベール・リゾルキン空間から斉次トリベール・リゾルキン空間への連続性を得るにはかなり大きな障害がある。本研究で何とか乗り越える方策を考えたい。

また、それぞれの場合に対応して、偏微分方程式論に応用する際に重要な働きをする特異積分と函数掛け算作用素との交換子についても研究するつもりである。

3. 研究の方法

研究開始当初の背景で述べた (i), (ii), (iii) のそれぞれの場合に、文献調査を交えた試行考察による研究を進めつつ、研究分担者、連携研究者、研究協力者とのアイデアの交換・討論によって研究の進展をはかる。

(1) 平成 27 年度

過去の結果の整理・精査を行うとともにトリベール・リゾルキン空間の研究をし、上記(ii)の場合に、既に成功した方法などを再検討し、 $T_{\{\Omega, \Phi, h\}}$ が斉次トリベール・リゾルキン空間で有界になるための条件の探索を行う。

このため、この分野の文献調査を行いつつ種々の試行考察を関数近似論への応用(研究分担者北原和明氏担当)を含めて行う。その際、国内の調和解析分野の研究者とのアイデアの交換・討論により研究進展を図る。

特に、国内の最も強力な特異積分研究者である佐藤秀一氏(金沢大学、連携研究者)には討論を通じて色々なアイデアを得たいと考えている。

また、未発表であるが北京師範大の Ding 教授との共同研究で H^1 ハーディ空間に属する場合の結果もあり、Xue 教授とは関連したベクトル値特異積分であるマルチンキエヴィッチ積分の研究で共同研究している。

これらからも、目的の研究進展に彼らとのアイデアの交換・討論は極めて有用であると思われる。

(2) 平成 28 年度

初年度において上記(ii)の研究が思ったように進展しなかった場合には、関連した過去の結果を更に調査し、新たなアイデアを開発し、引き続き(ii)の研究を続ける。と同時に、上記(i), (ii-1)の研究に取り掛かる。

このため、この分野の文献調査を行いつつ種々の試行考察を関数近似論への応用(研究

分担者北原和明氏担当)を含めて行う。その際、国内の調和解析分野の研究者とのアイデアの交換・討論により研究進展を図る。特に、佐藤秀一氏(金沢大学, 連携研究者)には討論を通じて色々なアイデアを得たいと考えている。

また、北京師範大のXue教授・Ding教授とのアイデアの交換・討論を行うことにより研究の進展をはかる。

(3) 平成29年度

28年度において上記(i), (ii-1)の研究が思ったように進展しなかった場合には、関連した過去の結果を更に調査し、新たなアイデアを開発し引き続き(i), (ii-1)の研究を続ける。

同時に、それまで2年間の研究の総括を行いつつ、より一般的な場合への足掛かりをつかむ研究を行う。

このため、この分野の文献調査を行いつつ種々の試行考察を関数近似論からのアイデアも得ながら(研究分担者北原和明氏担当)研究を行う。その際、

国内の調和解析分野の研究者とのアイデアの交換・討論により研究進展を図る。特に、佐藤秀一氏(金沢大学, 連携研究者)には討論を通じて色々なアイデアを得たいと考えている。

また、北京師範大のXue教授・Ding教授とのアイデアの交換・討論を行うことにより研究の進展をはかる。

4. 研究成果

(1) 研究課題「曲面に関連した特異積分とトリール・リゾルキン空間の研究」に直接関係した成果。

主な発表論文等の雑誌論文欄の , , , , および がこの面の成果である。 , , ,

が特異積分に関するもので、 はベクトル値特異積分に関するものである。 , は(ii)の場合の成果、 は(iii)の場合を扱い、さらにその極大関数についても考察した。その際、 で開発した手法が決め手になった。この手法は強力(ii)をより一般にした場合にも応用できた。その結果は複数の論文として投稿中である。

は前回の科研費による研究成果の Triebel-Lizorkin space boundedness of rough singular integrals associated to surfaces. J. Inequal. Appl. 2015, を更に改良したものである。

(2) 通常の特異積分における成果。

雑誌論文欄 , , がこれに相当する成果で、曲面に関連しない通常の場合を扱ったものである。 はリトルウッド・ペーリー作用素が L^2 有界であるための必要十分条件を論じたもので、以前の論文に不十分な点があっ

たものに対する補正である。 は前回の科研費による研究成果 Y. Sawano, K. Yabuta, Fractional type Marcinkiewicz integral operators associated to surfaces. J. Inequal. Appl. 2014, 2014:232, 29 pp. を重み付きトリール・リゾルキン空間から重み付き L^p 空間に拡張したものである。 は、分数巾マルチンキエヴィッチ積分作用素のトリール・リゾルキン空間から L^p 空間への有界性を考察したものである。

(3) 多重線形ベクトル値特異積分における成果。

雑誌論文欄 , , , がこれに相当する。いずれも曲面には直接関係しない。 は多重線形ベクトル特異積分(リトルウッド・ペーリー重み付き評価)について、核函数の条件を最大限ゆるめに成功した。このために、最近開発された特異積分の“sparse”作用素による評価の手法を多重線形ベクトル特異積分にも使えるように工夫した。 は双線形フリエマルチプライヤーとそれに関連した特異積分の L^p 有界性を考察したものである。

は多重線形リトルウッド・ペーリー作用素のCampanato空間での有界性を論じたもので、古典的な場合の結果を多重線形の場合に拡張したものである。 は多重線形リトルウッド・ペーリーのg-函数について、多重線形ベクトル値特異積分の考えでうまく取り扱えることを検証したものである。

(4) 研究課題に直接関係しない関連成果

雑誌論文欄 , がこれに相当する。特異積分に直接関係しないが、特異積分を扱うときに重要な分数巾極大関数について、立方体のときに知られている結果が長方体でも成り立つことを立証したものである。この面での知見の不安要素を解消するものである。 は に不正確な部分があったのでそれを修正したものである。

以上、第一、第二、第三の目的については、かなりの成果をあげ、曲面に関連した特異積分とトリール・リゾルキン空間の研究の進展に貢献することができた。ただ一つ残念なことは、第二については進展させることができなかった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計14件)

F. Liu, Q. Xue, and K. Yabuta, Rough maximal singular integral and maximal operators supported by subvarieties on Triebel-jou Lizorkin spaces. Nonlinear Anal. 査読あり, 171, 2018, 41-72.

M. Cao and K. Yabuta, The multilinear Littlewood-Paley operators with minimal

regularity conditions, J. Fourier Anal. Appl. 査読あり, published online 19 April 2018. doi:10.1007/s00041-018-9613-7

Corrigendum to ``On multilinear fractional strong maximal operator associated with rectangles and multiple weights, Rev. Mat. Iberoam. 33. (2017), no.2, 555--572'', Rev. Mat. Iberoam. 査読あり, 34, 2018, no.1, 475-479. doi:10.4171/rmi/993

K. Yabuta, Remarks on L2 boundedness of Littlewood-Paley operators. Analysis (Berlin), 査読あり, 37, 2017, no. 4, 243-244. doi:10.1515/anly-2017-0044

Z. Si, Q. Xue, K. Yabuta, On the bilinear square Fourier multiplier operators and related multilinear square functions. Sci. China Math. 査読あり, 60, 2017, no. 8, 1477-1502. doi: 10.1007/s11425-016-0324-3

M. Cao, Q. Xue, K. Yabuta, On multilinear fractional strong maximal operator associated with rectangles and multiple weights. Rev. Mat. Iberoam. 査読あり, 33, 2017, no. 2, 555-572. doi:10.4171/rmi/9

K. Yabuta, Remark on the Triebel-Lizorkin space boundedness of rough singular integrals associated to surfaces. Sci. Math. Jpn. 査読あり, 79, 2016, no. 2, 165-174.

Y. Ding, K. Yabuta, Triebel-Lizorkin space boundedness of rough singular integrals associated to surfaces of revolution. Sci. China Math. 査読あり, 59, 2016, no. 9, 1721-1736. doi: 10.1007/s11425-016-5154-1

Y. Sawano, K. Yabuta, Weighted estimates for fractional type Marcinkiewicz integral operators associated to surfaces. Some topics in harmonic analysis and applications, 331-367, Adv. Lect. Math. (ALM), 査読あり, 34, Int. Press, Somerville, MA, 2016.

W. Li, Z. Si, K. Yabuta, Boundedness of singular integrals associated to surfaces of revolution on Triebel-Lizorkin spaces. Forum Math. 査読あり, 28, 2016, no. 1, 57-75. DOI: 10.1515/forum-2014-0066

K. Yabuta, Triebel-Lizorkin space boundedness of Marcinkiewicz integrals associated to surfaces. Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B, 査読あり, 30, 2015, no. 4, 418-446. doi:10.1007/s11766-015-3358-8

Q. Xue, K. Yabuta, J. Yan, Fractional type Marcinkiewicz integral operators on function spaces. Forum Math. 査読あり, 27, 2015, no. 5, 3079-3109. DOI:

10.1515/forum-2013-0200

S. He, Q. Xue, T. Mei, K. Yabuta, Existence and boundedness of multilinear Littlewood-Paley operators on Campanato spaces. J. Math. Anal. Appl. 査読あり, 432, 2015, no. 1, 86-102. doi:10.1016/j.jmaa.2015.06.037

Q. Xue, X. Peng, K. Yabuta, On the theory of multilinear Littlewood-Paley g-function. J. Math. Soc. Japan, 査読あり, 67, 2015, no. 2, 535-559. doi: 10.2969/jmsj/06720535

〔学会発表〕(計 2 件)

K. Yabuta, Besov and Triebel-Lizorkin space estimates for fractional diffusion, The international Conference on Harmonic Analysis and Applications, May 20-22, 2016.

K. Yabuta, Triebel-Lizorkin boundedness of Marcinkiewicz integrals associated to surfaces, The international Conference on Harmonic Analysis and Applications, May 22-25, 2015.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藪田 公三 (YABUTA KOZO)
関西学院大学・数理科学研究センター・
客員研究員
研究者番号：30004435

(2) 研究分担者

北原 和明 (KITAHARA KAZUAKI)
関西学院大学・理工学部・教授
研究者番号：40195277

(3)連携研究者

佐藤 秀一 (SATO SHUICHI)
金沢大学・人間社会研究域学校教育系・教授
研究者番号：20162430

(4)研究協力者

DING Yong
北京師範大学・数学科学学院・教授
XUE Qingying
北京師範大学・数学科学学院・教授