

令和 元年 5月 10日現在

機関番号：82723

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04943

研究課題名(和文) 数式処理的手法による有理関数の複素力学的性質の解析

研究課題名(英文) Analysis of dynamics of rational maps using the method of computer algebra

研究代表者

藤村 雅代 (Fujimura, Masayo)

防衛大学校(総合教育学群、人文社会科学群、応用科学群、電気情報学群及びシステム工学群)・総合教育学群  
・准教授

研究者番号：00531758

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,400,000円

研究成果の概要(和文)：有理関数のモジュライ空間の表現空間の一つを導入し、その空間上で有理関数の退化現象を調べた。ブラシュケ積の幾何学的性質の解析を行い、新たに定義した外部曲線の定義方程式を得た。さらに外部曲線と内部曲線のある関係を見出すことに成功した。これにより高次の場合の解析が難しい内部曲線の解析を外部曲線を経て解析可能にする道筋を与えることができた。また、海外の研究者らと本研究から派生した問題の共同研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

ブラシュケ積の幾何学的性質に関しては、行列の数域などに関連があり他分野への応用が多い内部曲線についての研究が多くなされているが、次数が高い場合は内部曲線の定義方程式を求めることは難しかった。本研究で導入した外部曲線と内部曲線との関係がわかったことで、比較的解析が容易な外部曲線を経て内部曲線の性質を調べることが可能になった。研究には数式処理システムを利用しているが、その研究手法の応用などが期待され海外の研究者らとの共同研究にも着手することができた。

研究成果の概要(英文)：Every point in the moduli space of rational maps of degree  $d$  contains an element in so-called "normalized family" as a representative. Using this normalized family, I studied the type of degeneration of rational maps.

I also studied the geometry of Blaschke products. The interior curve of Blaschke product is defined by an envelope and the defining equation is not simple. I introduced the exterior curve of Blaschke product of degree  $d$  and proved the curve was an algebraic curve of degree at most  $d-1$ . Moreover, I succeeded in finding there was a duality-like relationship between the interior and exterior curves of Blaschke product. This provides a way to analyze the interior curve by using the exterior curve. I also collaborated with foreign researchers on the problem of triangular ratio metric.

研究分野：複素力学系

キーワード：有理関数 関数論 数式処理

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

### 1. 研究開始当初の背景

2 次多項式の複素力学系の研究では 1-パラメータ写像族  $p_c(z) = z^2 + c$  ( $c \in \mathbb{C}$ ) の  $c$ -平面を用いた表現がよく用いられる。この  $c$ -平面は係数によるパラメータ空間であると同時に、アフィン共役類全体からなるモジュライ空間としても解釈できる。3 次多項式については、多くの研究結果が知られているが、ほとんどが多項式の係数をパラメータとした空間を利用している。しかしながら、多項式の係数をパラメータとするパラメータ空間は力学的性質をうまく反映しておらず、力学的性質による分類を行う空間として適さない。その解決の一つとして、1993 年に Milnor が、2 次有理関数のモジュライ空間に対して不動点の乗数によるパラメータ表現を用いて注目すべき結果を与えた。本研究の代表者(以下、代表者と略す)は 2007 年に、この乗数によるパラメータ表現を、一般次数の多項式に適用することを考え、除外集合(表現空間上で共役類が対応しない部分)の存在を含め、いくつかの多項式の特徴的な性質を与える結果を得た。除外集合上では多項式が退化すると考えられる。この現象を可視化するために代表者は、多項式のモジュライ空間を自然に含む拡張モジュライ空間を導入し、さらに、2008 年にこの空間がモジュライ空間のコンパクト化を与えることを示した。モジュライ空間のコンパクト化については、より力学系的視点から DeMarco and McMullen (2008) による tree 構造を用いたモジュライ空間のコンパクト化の研究も行われている。

有理関数のモジュライ空間に関しては、2 次の場合の前述の Milnor の研究と、Silverman (1998) による研究、また、2 次のモジュライ空間のコンパクト化に関する DeMarco (2007) の研究が知られている。しかし、3 次以上の有理関数に関して力学系の研究への応用が可能な決定的な結果は無く、具体的な力学系の分類の研究は進んでいなかった。

Daepf は 2002 年に、3 次ブラシュケ積の逆像を結ぶ三角形がブラシュケ積のゼロでない零点に焦点を持つ楕円に接するという幾何学的性質を与えた(図 1 参照)。この結果は三角形の外接円と内接円の間関係式を与えるオイラー・チャップルの定理の拡張にもなっている。

代表者は 2013 年に 4 次ブラシュケ積の逆像を結ぶ直線族の包絡線が楕円を含むための必要十分条件を与え、四角形の外接円と内接円の間関係式を与えるフースの定理の拡張を与えた。計算には数式処理システムを用いた。しかしながら、5 次以上のブラシュケ積の逆像を結ぶ直線族の包絡線を同様の方法で求めることは難しい。

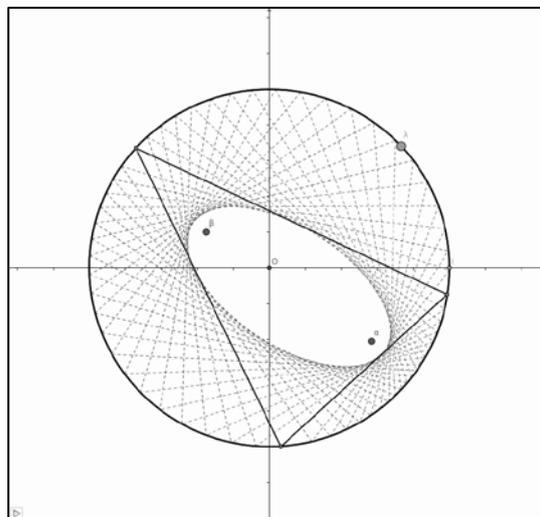


図 1 : 3 次ブラシュケ積の逆像が作る三角形の包絡線は楕円になる。

### 2. 研究の目的

本研究の研究目的は有理関数をキーワードとする解析学の問題を数式処理システムを用いて解決することである。特に次の問題を扱う。

- (1) 有理関数のモジュライ空間の表現空間のコンパクト化を与えること。  
自身の先行研究の結果からモジュライ空間の表現空間の構成はほぼ完成しているので、本研究では、有理関数の退化現象を詳しく調べ、そのコンパクト化を与えることを目標とする。
- (2) ブラシュケ積を持つ新たな幾何学的性質を見出すこと。  
自身が 2013 年に得た結果としてブラシュケ積の幾何学的性質を利用して、三角形や四角形が内接円と外接円を同時に持つための必要十分条件を与える古典的な定理(チャップルの定理、フースの定理)の拡張を行った。この問題を発展させるとともに、このような、有理関数に関する複素解析や複素幾何分野の諸問題を扱い、新たな幾何学的性質を求めることを目標とする。
- (3) 上記研究から派生する問題を解決すること。  
上記(1)、(2)の研究を進める過程で派生する様々な問題を、解決することを目標とする。

### 3. 研究の方法

本研究では、係数にパラメータが入った有理関数をそのまま扱うことになる。そのため、計算実験では、数式処理システムを用いたパラメータ付きの代数方程式系の変形を行う手法を用いる。この方法は、誤差を含まないため、得られたデータ(式)から数学的な結果(予想)を導き出すことに大変すぐれている。

- (1) モジュライ空間のコンパクト化を行うためには有理関数の退化現象を調べる必要がある。これまでの研究から、有理関数の退化は不動点や特異点の衝突により生じることが分かっている。しかしながら、以前は、2 次の場合でさえ、すべてのメビウス共役類を記述できる(係数座標としての)有理関数族が与えられておらず、退化現象の解析は難しかった。2010 年に構成した Normalized form と呼ばれる族は、有理関数空間の大域座標(係数座標による)を与えるものである。この族を用いて、数式処理システムを用いた実験を行うことで有理関数の退化現象の解析を行う。
- (2) ブラシュケ積が持つ未知の幾何学的性質を見つけるために、動的数学ソフトを用いた実験を行う。この描画実験により、成立すると予想される現象を見つけ出し、数学的に定式化し、数学的に証明を行う。という手順を用いる。

### 4. 研究成果

本研究の成果として次のような結果が得られた。

- (1) ブラシュケ積が持つ幾何学的性質を調べる研究を行った。特に以下のような単位円周上の点のブラシュケ積による逆像が持つ幾何学的性質を扱った。

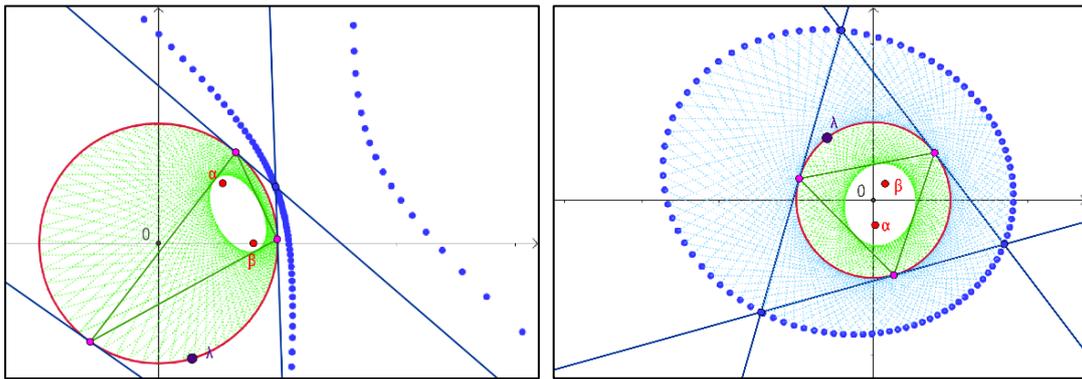


図 2 : 3 次ブラシュケ積の内部曲線(包絡線)と外部曲線(青色のドットで表現)。赤色の円は単位円を表す。

- ① 前研究課題の結果として得られたブラシュケ積の幾何学的性質の応用として、得られた結果を口頭発表し、まとめたものが、

An extension of Fuss' theorem, 数式処理 21 (2015.8), 5-8. [査読なし]

に掲載された。さらに、この結果を中高生向けにやさしく設定しなおして 2015 年 8 月に独立行政法人国立女性教育会館で開催された『女子中高生夏の学校 2015~科学・技術・人との出会い~』において解説し、数式処理システムなどを用いて中高生向けの実験実習を行った。

- ② 新たに逆像の接線の交点の軌跡としての外部曲線を導入した。それに伴い、先行研究(例えば、Daepf らの 2002 年の結果など)で扱われているブラシュケ積の逆像を結んで得られる直線族の包絡線としての曲線を内部曲線と名付けた。3 次ブラシュケ積の場合 Daepf らの結果から内部曲線が楕円をなすことが知られているが、本研究では 3 次ブラシュケ式の外部曲線が退化しない 2 次曲線になることを示した。The 23rd International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications (2015.8) にて口頭発表を行い、結果をまとめたものは

Masayo Fujimura, The complex geometry of Blaschke products of degree 3 and associated ellipses, *Filomat*, 31 (2017), 61-68. (DOI: 10.2298/FIL1701061F)

に掲載された(図2参照)。

- ③ ②の結果を発展させて、一般次数に関する結果として $d$ 次ブラシュケ積の外部曲線は高々 $d-1$ 次の代数曲線であることを示すことができた。Workshop on Geometric Function Theory and Special Functions (2016.8)にて口頭発表を行い、結果をまとめたものが関数論の論文誌

Masayo Fujimura, Blaschke products and circumscribed conics, *Computational Methods and Function Theory*, **17** (2017), 635-652.  
(DOI: 10.1007/s40315-017-0201-7)

に掲載された。

- ④ 数式処理システムを使った実験から内部曲線と外部曲線の間には、ある種の双対性があることが観測され、実際に外部曲線の双対曲線の原点对称が内部曲線に対応することを数学的に示すことに成功した。Workshop on Geometric Function Theory and Special Functions II (2017.8)にて口頭発表を行い、まとめたものは解析学の論文誌

Masayo Fujimura, Interior and exterior curves of finite Blaschke products, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **467** (2018), 711-722.  
(DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.07.031)

に掲載された。

- (2) Triangular ratio metric に関する共同研究を Turku Univ. (Finland) の M. Vuorinen 氏、(同) P. Hariri 氏、Vasile Alecsandri Univ. of Bacau (Romania) の M. Mocanu 氏と行った。

特に 3次元空間内の球面の内部の Triangular ratio metric は光学の問題として古典的なアルハゼンの問題(球面の外部の場合にはトレミーの問題)：

『光源と球面の鏡が与えられているとき、観測者の目に光が入るような鏡上の反射点を求めよ』

と対応がつく。

さらに、これらの問題は円板領域に関するアルハゼンの問題の解の求め方(図3の点  $z$ )を求める問題になり、4次方程式の解を求めることと同値になる。これらをまとめたものが関数論の論文誌

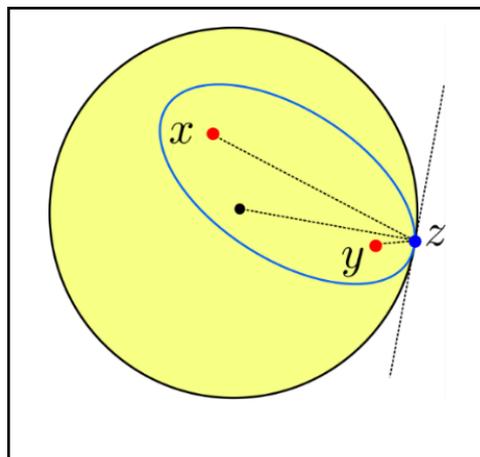


図3：円板領域に関するアルハゼンの問題の解の求め方

Masayo Fujimura, Parisa Hariri, Marcelina Mocanu and Matti Vuorinen, The Ptolemy-Alhazen problem and spherical mirror reflection, *Computational Methods and Functional Theory*, **19**, (2019), 135-155. (DOI: 10.1007/s40315-018-0257-z)

に掲載された。さらに、Triangular ratio metric の一般化である Barrlund's distance の研究にも着手できた。

- (3) 有理関数のモジュライ空間のコンパクト化を行うため、有理関数の退化に関する実験を行った。具体的には、数式処理システムを用いた実験により Normalized form で表現された有理関数が不動点や特異点の衝突によりどのように退化するのかを解析することで退化のパターンを調べた。実験結果をまとめたものを 2018年3月に Risa/Asir Conference 2018 において口頭発表をした。

- (4) 関東学院大の大墨氏、香川高専の近藤氏と誤差を抑えたジュリア集合の描画についての研究を行った。これは上記(3)の研究を行う上で、有理関数が退化する際のジュリア集合を極力誤差なく描きたいという目的から派生した問題である。現在、誤差のない有理計算を用いた描画における問題点の洗い出しと、区間数を導入した描画方法を検証しているところである。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 4 件)

- ① Masayo Fujimura, Parisa Hariri, Marcelina Mocanu and Matti Vuorinen, The Ptolemy-Alhazen problem and spherical mirror reflection, *Computational Methods and Function Theory*, **19** (2019), 135-155.  
DOI: 10.1007/s40315-018-0257-z [査読あり]
- ② Masayo Fujimura, Interior and exterior curves of finite Blaschke products, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **467** (2018), 711-722.  
DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.07.031 [査読あり]
- ③ Masayo Fujimura, Blaschke products and circumscribed conics, *Computational Methods and Function Theory*, **17** (2017), 635-652.  
DOI: 10.1007/s40315-017-0201-7 [査読あり]
- ④ Masayo Fujimura, The complex geometry of Blaschke products of degree 3 and associated ellipses, *Filomat*, **31** (2017), 61-68.  
DOI: 10.2298/FIL1701061F [査読あり]

[学会発表] (計 18 件)

- ① 藤村 雅代, On some duality between interior and exterior curves of Blaschke products, Risa/Asir Conference 2019 (石川県 金沢市) 2019年3月26日
- ② 大墨 礼子, 近藤 祐史, 藤村 雅代, 反復計算への区間演算の適用について, 京都大学数理解析共同研究(公開型) Computer Algebra - Theory and its Applications (京都府、京都市) 2018年12月19日
- ③ 藤村 雅代, The geometry of finite Blaschke products: some duality results, 京都大学数理解析共同研究(公開型) Computer Algebra - Theory and its Applications (京都府、京都市) 2018年12月20日
- ④ 大墨 礼子, 藤村 雅代, 反復計算におけるデータ格納, 日本数式処理学会第27回大会, 福岡教育大学 (福岡県 宗像市), 2018年6月9日
- ⑤ 藤村 雅代, Computer experiments on some coordinate systems for the moduli space of rational functions, Risa/Asir Conference 2018, 金沢大学 (石川県 金沢市) 2018年3月25日
- ⑥ 藤村 雅代, 2次曲線で囲まれた領域におけるアルハゼンの問題の数式処理を用いた解法 京都大学数理解析研究所研究集会 数式処理の新たな発展 (京都府 京都市), 2017年9月7日
- ⑦ Masayo Fujimura, Interior and exterior curves of Blaschke products, Workshop on Geometric Function Theory and Special Functions II, (Tohoku Univ.) 2017年8月4日
- ⑧ 藤村 雅代, Application of symbolic computation to Ptolemy-Alhazen problem, 日本数式処理学会第26回大会, 東邦大学 (千葉県 船橋市), 2017年6月11日
- ⑨ 藤村 雅代, トレミー・アルハゼンの問題について Risa/Asir を用いた解析, Risa/Asir Conference 2017, 金沢大学 (石川県 金沢市) 2017年3月30日
- ⑩ 藤村 雅代, Complex geometry of Blaschke products and associated conics, Mini-Workshop on Blaschke Product, 大阪市立大学 (大阪府 大阪市) 2016年11月24日
- ⑪ 藤村 雅代, GeoGebra の複素幾何への応用, 統計数理研究所共同研究 動的幾何学ソフトウェア GeoGebra の整備と普及 (東京都 立川市) 2016年10月31日
- ⑫ 藤村 雅代, ブラシュケ積の複素幾何と外接楕円, 京都大学数理解析研究所研究集会 数式処理研究の新たな発展 (京都府 京都市) 2016年9月9日
- ⑬ Masayo Fujimura, Complex geometry of Blaschke products and associated conics, Workshop on Geometric Function Theory and Special Functions (Tohoku Univ.), 2016年

8月25日

- ⑭ 藤村 雅代, 3次ブラシュケ積が織りなす2次曲線, 日本数式処理学会第25回大会, 福岡大学(福岡県 福岡市), 2016年6月4日
- ⑮ 藤村 雅代, On the Schneps problem for the rational functions, Risa/Asir Conference 2016, 金沢大学(石川県 金沢市) 2016年3月30日
- ⑯ Masayo Fujimura, The complex geometry of Blaschke products of degree 3 and associated ellipses, The 23rd International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications (Fukuoka, JAPAN) 2015年8月26日
- ⑰ 藤村 雅代, 3次ブラシュケ積が作る外接楕円と内接楕円, 京都大学数理解析研究所研究集会 数式処理研究の新たな発展(京都府 京都市) 2015年8月21日
- ⑱ 藤村 雅代, On the porous attractor of an IFS, 日本数式処理学会第24回大会, 筑波大学(茨城県 つくば市), 2015年6月5日

[その他]

- ① 大墨 礼子, 藤村 雅代, 反復計算におけるデータ格納, 数式処理 **25:1** (2019.1), 47-50. [査読なし]
- ② 藤村 雅代, Application of symbolic computation to Ptolemy-Alhazen problem, 数式処理 **24:2** (2018.5), 55-58. [査読なし]
- ③ 藤村 雅代, 3次ブラシュケ積が織りなす2次曲線, 数式処理 **23:2** (2017.5), 100-103. [査読なし]
- ④ Masayo Fujimura, Complex geometry of Blaschke products and associated circumscribed conics, RIMS Kôkyûroku **2019** (2017. 4), 88-95.  
URL: <http://hdl.handle.net/2433/231728> [査読なし]
- ⑤ 藤村 雅代, GeoGebra の複素幾何への応用, 統計数理研究所共同研究レポート **391** (2017.3), 30-35. [査読なし]
- ⑥ 藤村 雅代, On the porous attractor of an IFS, 数式処理 **22:2** (2016.5), 6-9. [査読なし]
- ⑦ Masayo Fujimura, Circumscribed and inscribed ellipses induced by Blaschke products of degree 3, RIMS Kôkyûroku **1976** (2015. 12), 71-80.  
URL: <http://hdl.handle.net/2433/224372> [査読なし]
- ⑧ 藤村 雅代, An extension of Fuss' theorem, 数式処理 **21:2** (2015.8), 5-8. [査読なし]

※科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。