様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

# 科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １４ 日現在

機関番号：１２１０１
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ０４９４５

研究課題名（和文）符号不定係数と混合型非線形性を伴う楕円型境界値問題の正値解の分岐構造に関する研究

研究課題名（英文）Study on the bifurcation structure of positive solutions for concave-convex mixed nonlinear elliptic boundary value problems with indefinite weights

研究代表者
梅津　健一郎（UMEZU, Kenichiro）

茨城大学・教育学部・教授

研究者番号：００２９５４５３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,500,000円

研究成果の概要（和文）：多次元ユークリッド空間の滑らかな有界領域において，concave-convex 混合型の非線形性と符号不定係数を兼ね備える非線形楕円型境界値問題に対して非自明非負解の存在とその性質を研究した．研究は2つの方向で進められ，それぞれ次の成果を得た．
(1) パラメータの変化にしたがった非自明解集合の大域的位相構造を決定した．特に，ある条件のもとでループ形状の連続体位相構造の存在を示した．
(2) concave 性と符号不定係数の組み合わせにより発生する非自明解の正値性問題に対して，肯定的に解決するための十分条件を得た(零解のまわりで十分な滑らかさをもつ非線形問題に対しては非自明解は正値性をもつ).

研究成果の概要（英文）：We study concave-convex nonlinear elliptic boundary value problems, equipped with indefinite weights, in a smooth bounded domain of the Euclidean space, and investigate the existence of nontrivial nonnegative solutions and their properties.
On one hand, we have determined the bifurcation structure of the nontrivial nonnegative solutions set in some cases, as a parameter included varies. Especially, we have obtained a loop type component of nontrivial nonnegative solutions which bifurcates from the trivial solutions line.
On the other hand, we have provided certain sufficient conditions for the positivity of nontrivial nonnegative solutions. The strong maximum principle does work for nonlinear elliptic problems which are regular around zero solutions in the standard sense, in which class any nontrivial nonnegative solution so implies a positive solution. However, it does not work in general for concave-convex problems with indefinite weights.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：非線形楕円型境界値問題　concave-convex型非線形性　非自明非負解　符号不定係数　分岐解析　正値性　優解劣解　変分的手法

１．研究開始当初の背景

多次元ユークリッド空間の滑らかな境界をもつ有界領域において非線形楕円型境界値問題を考える．領域内部の方程式に含まれる非線形項は，ロジスティック反応項を特別な場合として含む優線形型である．ここで，未知関数は人口動態論の見地から個体の人口密度を表す．また，境界値問題に含まれる符号不定係数は個体の環境要因を記述する．本研究の最大の特徴は領域の境界条件に concave 型の非線形性を仮定することである．人口動態論的に意味するところは，個体数の領域外向きの流れが境界上の点に依存して，さらに未知関数に非線形的に依存して与えられることである．境界値問題の解は付随する時間発展の反応拡散方程式の時間無限大における定常状態を記述する．なお，応用上の観点から解としては非自明非負値古典解が興味の対象である．concave 型非線形性による特異性のため，非自明非負解の境界における正値性は一般に期待できない．

非線形楕円型偏微分方程式については，過去 40 年に渡ってディリシレ，ノイマン及びロバン境界条件といった線形境界条件のもとで解の考察が十分為されてきた．非線形問題の順序構造に基づいた Krasnoselskii, Amann の研究, 変分法の立場から Ambrosetti, Rabinowitz, Brezis らの研究がある．また，分岐解析の立場から Crandall，Rabinowitz の研究は良く知られている．非線形境界条件の研究は非線形正値作用素の不動点定理により 1970 年代の Amann の研究が先駆的である．その後，優線形のべき乗型非線形項の非線形境界条件に対する研究が Chipot らにより 1990 年代に展開された．ロジスティックタイプの非線形項を内部にもち，べき乗型非線形項を境界条件に課したモデルの研究は 2002 年の研究代表者の研究が最初であると思われる．その後，Rossi，Suarez らが行った正定係数の場合の研究により，パラメータの変化にしたがった正値解の構造の解析が大きく進展し，変数係数の場合に多くの重要な示唆を与えた．並行して，空間不均一な環境要因（変数係数）のもとでの分岐解析は，2002 年の研究代表者の研究に端を発し，局所的分岐構造の考察から大域的構造の解明へと進展した(2004 年～2013 年)．

非線形境界条件の導入は領域内部の非線形項との間で混合型非線形性という複雑さを引き起こす．これまでには領域内部において混合型非線形問題を考察した Ambrosetti, Brezis，Cerami の先駆的な研究がある(1994 年)．他方，非線形境界条件を伴う混合型非線形性については，先に述べた Chipot らが領域内部と境界上で増大度の異なる優線形混合型非線形性を考察している．研究代表者は 2013 年より Humberto Ramos Quoirin (Universidad de Santiago de Chile) との共同研究において，劣線形型(concave 型)の非線形境界条件を置き，領域内部でロジスティックタイプの非線形性をもつ非線形境界値問題に対して，変分的手法と分岐論的手法の両面を駆使して正値解の存在，一意性，多重性，及びその安定性を調べた．さらにこれらの結果に基づいて正値解集合の分岐構造に多くの示唆を与えた(2014 年)．

２．研究の目的

問題に付随するエネルギー汎関数の振る舞いを見ると，混合型非線形性を構成する際に，内部の優線形性に対して最も興味深い非線形境界条件は劣線形性をもつことである．既存の研究では，劣線形の場合に十分な考察が為されていないと思われる．本研究では方程式に内包する係数が符号変化する場合を考察する．さらに，無限遠点からの分岐解のプロファイルと零解からの分岐解のプロファイルを解明する．つまり，正値解のパラメータに関する漸近的空間形状を与える．漸近的に正定数解が現れる場合，正定数解からの分岐解のプロファイルは空間一様にすぎない．他方で，爆発解，消滅解がどのような形状により成長，退化するのかを知ることは興味深い．

さて，劣線形型(concave 型)非線形性にはある困難が生じる．すなわち，零の近傍において可微分性をもたないため，零解からの分岐を示す際に単純固有値からの分岐理論の適用が困難である．さらに，可微分性の欠如と符号不定係数の融合は正値解に対する境界上の正値性の考察に困難を与える．いわゆる boundary point lemma が直ちに適用できない．実際，領域内部のべき乗型非線形項が劣線形性をもつとき，非自明非負値解の領域内のゼロ点集合，いわゆる‘dead core’の存在が良く知られている．以上の観察から，1 つには，既存の分岐理論に依存しない分岐正値解の存在及び非存在定理の確立，2 つには，境界版 dead core の存在とその形成過程の考察（優線形性のため，強最大値の原理から内部の正値性は保証される）が本研究課題において挑戦すべき問題である．

本研究では領域内部で優線形，境界上で劣線形の場合を考察する．変分法的見地から，内包する符号不定係数の影響と境界上の dead core 出現の可能性，及びパラメータの置き方から，問題に付随するエネルギー汎関数の振る舞いは単純ではない．このことは，正値解の個数の多様さにつながり，ひいては正値解集合の連結成分がパラメータの変化に応じて複数の折り返し点をもつことを暗示するだろう．このような多様性を明らかにすることは大変意義深い．なぜなら，ロジスティックタイプの非線形問題については正値解集合の構造はこれまで比較的単純なものが多く，複数の折り返し点をもつ正値解の連結成分の存在はほとんど知られていない．

本研究においては係数の符号不定性と混合型非線形性の融合が正値解集合にいかな

る複雑さを引き起こすかを論じる．この複雑さは安定な複数のプロファイルの存在を示唆し，初期個体数の大小による‘条件的生存’という，人口動態論的に非常に意義深い問題を提起する．

３．研究の方法

符号不定係数を伴う混合型非線形境界値問題において，正値解に関する種々の課題を明らかにするために，変分解析，分岐解析，解の先験的評価，及び優解劣解の構成とそれに基づく比較原理を援用した．符号不定係数に対するこれら非線形理論の有効性を求めて，変分解析の専門家である研究協力者Humberto Ramos Quoirinと優解劣解の構成法の専門家である Uriel Kaufmann との共同研究を軸に研究を進めた．ある種の特異性をもち，十分な滑らかさをもたない非線形項に対して，正則化法と位相解析的手法を援用して分岐解を得た．正値解のパラメータに関する漸近的プロファイルの存在と形成の考察では，変分解析と分岐解析で得られる解の評価を用いながら，問題のスケール変換，比較原理を組み合わせた．

京都産業大学，京都大学 RIMS，首都大学東京で開催された非線形問題関連セミナーにおいて成果発表を行い，研究課題解決に向けて議論を行った(学会発表②,④,⑥)．Universidad de Santiago de Chile の数学教室セミナーにおいて成果発表を行った(学会発表⑦)．2015 年 8 月 24 日から 9 月 3 日まで Ramos Quoirin を訪ねて Universidad de Santiago de Chile を研究訪問した．そこで本研究課題についてディスカッションを行った．2016 年 7 月 25 日から 8 月 5 日まで，及び 2017 年 8 月 1 日から 4 日まで Ramos Quoirin が研究代表者の所属機関である茨城大学教育学部に研究滞在した．そこで本研究課題についてディスカッションを行った．力学系，微分方程式とその応用に関する国際会議において招待講演を行い，成果発表した(学会発表⑤)．日本数学会函数方程式論分科会において一般講演を行い，成果発表した(学会発表①,③)．

４．研究成果

領域内部でロジスティック反応項，境界上で劣線形べき乗型のノイマン非線形境界条件を仮定して，零解から成る自明な枝からの分岐解の存在を示した．非線形境界条件に内包する符号不定係数の果たす役割を論じた．劣線形型非線形性により従来の分岐理論を適用することが難しく，問題の‘正則化’を行い，正則化問題に対して分岐理論を適用した．そして Whyburn の位相解析的手法を援用して極限操作を行い，目的とする非線形問題の分岐解の大域的構造を決定した(Ramos Quoirin との共同研究の成果；論文⑨)．この論文では Ramos Quoirin との共同研究(J.Differ. Eqns 257 (2014), 3935-3977)において考察した問題の極限問題を研究している．その後，ロジスティック非線形項に内包する係数を符号不定の場合に拡張して，人口動態論的には個体の共生共存の効果を仮定したモデルを考察して，正値解の存在，一意性及び多重性を変分解析と分岐解析を組み合わせて研究した(Ramos Quoirin との共同研究の成果；論文⑦)．

領域内部で優線形べき乗型非線形項，境界上で劣線形べき乗型のノイマン非線形境界条件を仮定して，Ambrosetti，Brezis，Cerami(1994)の精神にしたがって正値解の存在と多重性を確立した(Ramos Quoirin との共同研究の成果；論文⑧)．変分解析と分岐解析の融合が果たした成果のひとつである．加えて，正値解から成る分岐解の存在と挙動，及びパラメータの変化に関する漸近的空間形状を解析した．方程式のタイプとしては，Chipot ら(1991)の優線形-優線形型の非線形境界条件に対して劣線形型を補完的に扱っている．この発展として，非線形境界条件に内包する係数を符号不定の場合に一般化して，パラメータに関する正値解の局所存在，局所多重性を確立した．また漸近的形状も解析した(Ramos Quoirin との共同研究の成果；論文⑥)．ただし，大域的な多重性定理の確立には至っていない．また，大域的な分岐解析も今後の課題である．ネハリ多様体による第一の解と第二の解，及び分岐解，優解劣解により構成した解のそれぞれについて，境界上の正値性とパラメータによる漸近的形状を十分に解明できた．

領域内部で劣線形-優線形(concave-convex)の混合型非線形性をもつ非線形楕円型方程式をノイマン境界条件のもとで研究した．内包する符号不定係数のある場合において，パラメータに関する非自明非負解の局所存在と多重性，及び漸近的形状を解析した．さらに，分岐解析により非自明非負解集合が連続体(閉かつ連結な部分集合)をもつことを示し，特にループ形状の非自明非負解集合の存在を示した(Ramos Quoirin との共同研究の成果；論文⑤)，この研究では，論文⑥～⑨において開発した手法を援用した．ループ形状の解集合の存在は concave-convex タイプの非線形問題では初めての結果であった．この研究に付随して，劣線形項に含まれる係数を正定値に制限して分岐解析を行った．この問題は Ambrosetti，Brezis，Cerami(1994)が扱った混合型非線形項の優線形項に対する一般化と見ることができる．また，変分構造的には論文⑧で扱った非線形境界値問題と同等である．正則化法に基づく分岐解析，位相解析的方法，及び解の大きさとパラメータに関する先験的評価が分岐正値解の存在と挙動を引き出した(Ramos Quoirin との共同研究の成果；論文④)．ところで，論文⑤において open question となっ

ていた，異なるケースにおける異種ループ形状解集合の存在問題は肯定的に解くことに成功した(Ramos Quoirin との共同研究の成果；論文②)．パラメータに関する適当なスケール変換(スケーリング法)を開発して，パラメータの極限操作で消滅する解を，ある意味‘拡大変換’することによって，正則化問題の分岐解をより精密に解析することができた．

符号不定係数を伴う劣線形(concave)べき乗型非線形境界値問題は，非自明非負解が一般に正値解(領域内部で正値となる解)にならない．これは強最大値の原理が適用外であるためである．任意の非自明非負解が正値解となる条件の考察(正値性問題)はチャレンジに値する問題である．ディリシレ条件及びノイマン条件において正値性問題を考察して，変分的手法，優解劣解を構成する方法，解の先験的評価を組み合わせた連続的手法(continuation method)を駆使して，劣線形の度合いが線形に近い場合に正値性が成り立つことを示した(Kaufmann, Ramos Quoirin との共同研究の成果；論文③)．Bandle, Pozio, Tesei(1988)以来，concave タイプの非線形問題の非自明非負解に対する領域内部の正値性の研究の中で，領域全域で正値性が保証されるための十分条件を初めて与えた．また，劣線形-優線形の混合型非線形境界値問題の非自明非負解に対してこの結果を応用した．その後，異なったアプローチを駆使して，つまり，正則化問題に基づく分解解析によって非自明非負解の正値性を考察した．その結果，係数に関する条件を弱めることができた．また，劣線形の度合いを表すパラメータ(指数)の動きに応じて正値解の漸近挙動を精密に特徴付けることができた．併せて，空間１次元の場合に，符号不定係数のあるクラスが正値解を与える様子を優解劣解の具体的な構築により示した．最後に dead core をもつ非自明非負解の存在を比較原理に基づき証明した(Kaufmann, Ramos Quoirin との共同研究の成果；論文①)．

さらに発展として，(プロトタイプである）劣線形-優線形べき乗混合型から完全形への一般化を行った．ディリシレ及びノイマン境界条件のもとで考察して，ループ形状の有界連続体から成る非自明解集合の存在を示した(Kaufmann, Ramos Quoirin との共同研究の成果)．論文①,③において確立した手法を用いて，ある付加条件のもとでループ形状連続体上の非自明解の正値性を導くことに成功した．

劣線形べき乗型問題の非自明非負解に対する正値性問題をディリシレ境界条件のもとで研究した．ノイマン条件の場合の手法をパラレルに用いることを試みた．しかし，劣線形型非線形性の特異性により，境界上で解が零点をもつことが議論に困難さを与えた．この困難を克服するために，符号不定係数に境界上である種の増大度を仮定した．その増大性にマッチした解のクラスを設定した結果，正値解を構成することに成功した(Kaufmann, Ramos Quoirin との共同研究の成果)．併せて，空間 1 次元の場合に，優解劣解の方法を援用して符号不定係数から正値解を構成した．

## ５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計９件）


①U.Kaufmann, H.Ramos Quoirin, K.Umezu, Positive solutions of an elliptic Neumann problem with a sublinear indefinite nonlinearity, ***Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA***，査読有，**25**:12，(2018).
DOI: 10.1007/s00030-018-0502-1

②H.Ramos Quoirin, K.Umezu, A loop type component in the non-negative solutions set of an indefinite elliptic problem, ***Communications on Pure and Applied Analysis***，査読有，**17**(3)，(2018)，1255-1269.
DOI: 10.3934/cpaa.2018060

③U.Kaufmann, H.Ramos Quoirin, K.Umezu, Positivity results for indefinite sublinear elliptic problems via a continuity argument, ***Journal of Differential Equations***，査読有，**263**(8)，(2017)，4481-4502.
DOI: 10.1016/j.jde.2017.05.021

④H.Ramos Quoirin, K.Umezu, An indefinite concave-convex equation under a Neumann boundary condition II, ***Topological Methods in Nonlinear Analysis***，査読有，**49**(2)，(2017)，739-756.
DOI: 10.12775/TMNA.2017.007

⑤H.Ramos Quoirin, K.Umezu, An indefinite concave-convex equation under a Neumann boundary condition I, ***Israel Journal of Mathematics***，査読有，**220**(1)，(2017)，103-160.
DOI: 10.1007/s11856-017-1512-0

⑥H.Ramos Quoirin, K.Umezu, An elliptic equation with an indefinite sublinear boundary condition, ***Advances in Nonlinear Analysis***，査読有，(2016)，published online.
DOI: 10.1515/anona-2016-0023

⑦ H.Ramos Quoirin, K.Umezu, Positive steady states of an indefinite equation

with a nonlinear boundary condition: existence, multiplicity and asymptotic profiles, ***Calculus of Variations and Partial Differential Equations***, 査読有, **55**(4), (2016), paper No.102, 47pp.
DOI: 10.1007/s00526-016-1033-4

⑧H.Ramos Quoirin, K.Umezu, On a concave -convex elliptic problem with a nonlinear boundary condition, ***Annali di Matematica Pura ed Applicata***, 査読有, **195**(6), (2016), 1833-1863.
DOI: 10.1007/s10231-015-0531-x

⑨H.Ramos Quoirin, K.Umezu, Bifurcation for a logistic elliptic equation with nonlinear boundary conditions: A limiting case, ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 査読有, **428**(2), (2015), 1265-1285.
DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.04.005

〔学会発表〕(計７件)
① 梅津 健一郎, Loop components of nontrivial nonnegative solutions for indefinite concave-convex problems, 日本数学会２０１８年年会函数方程式論分科会(東大数理), 2018年.

②梅津 健一郎, concave-convex タイプの非線形楕円型境界値問題に対するループ型有界連続体解集合の存在について, 変分問題セミナー(首都大東京理工学), 2017年.

③梅津 健一郎, Positivity for nontrivial nonnegative solutions of an indefinite sublinear problem, 日本数学会２０１７年年会函数方程式論分科会(首都大東京理工学), 2017年.

④ K.Umezu, On the existence of a loop component of nontrivial non-negative solutions for some concave-convex problem, Workshop on reaction diffusion equations and numerical analysis(京産大理), 2016年.

⑤ K.Umezu, A loop type component of positive solutions of an indefinite concave-convex problem with the Neumann boundary condition, The 11th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications(Orlando, Florida, USA), 2016年.

⑥ K.Umezu, An indefinite superlinear elliptic equation with a nonlinear boundary condition of sublinear type, RIMS Workshop ‘Shapes and other properties of solutions of PDEs’(京大RIMS), 2015年.

⑦ K.Umezu, Bifurcation analysis for a logistic elliptic equation having nonlinear boundary conditions with sign-definite weights, (Math Department Seminar of Universidad de Santiago de Chile), 2015年.

〔その他〕
ホームページ等
https://info.ibaraki.ac.jp/Profiles/17/0001645/profile.html

６．研究組織
(1)研究代表者
梅津 健一郎 (UMEZU, Kenichiro)
茨城大学・教育学部・教授
研究者番号：００２９５４５３

(4)研究協力者
RAMOS QUOIRIN, Humberto
Universidad de Santiago de Chile

KAUFMANN, Uriel
Universidad Nacional de Córdoba
(平成28年度より研究協力者)