

令和元年6月14日現在

機関番号：12102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04946

研究課題名(和文) 流体力学の非定常問題への実解析的・数値解析的アプローチ

研究課題名(英文) Real analytical and numerical approach to non-stationary problems of fluid dynamics

研究代表者

久保 隆徹 (Takayuki, Kubo)

筑波大学・数理物質系・講師

研究者番号：90424811

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：非斉次重みなどの重み付き L_p 空間における様々な非有界領域においてStokes半群の重み付き L_p - L_q 評価を導き、その空間での時間無限大での減衰度を得た。同様の手法を用いて双曲型Navier-Stokes方程式の外部領域においても局所エネルギー減衰定理を導いた。圧縮性・非圧縮性の二相問題について、モデル問題の線形化問題の解作用素に対する R 有界性を導いた。さらに、有界領域での任意の初期値に対する時間局所解の一意存在性を示すことができた。固有値の非存在範囲に対する計算機援用解析を考察するために圧力安定化法による近似問題を考察しその近似の正当性を示せた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

重み付き空間での解析は、定常問題の安定性解析に有用であり意義がある。また、方向別に重みを変えることができるのはこれから多くの応用が期待できる。二相問題についての結果や圧力安定化法の近似の正当性に関する結果は、自由境界問題や流体運動のシミュレーションの結果を数学的に保証するものであり、とても意義のある結果である。

研究成果の概要(英文)：We derived the weighted L_p - L_q estimates of Stokes semigroups in some unbounded domains in weighted L_p space such as inhomogeneous weights, and obtained the decay estimate at time infinity in that space. In a similar method, we obtained the local energy decay estimate for the exterior domain of the hyperbolic Navier-Stokes equations.

For the compressible-incompressible two-phase problems, we derived R -boundedness for the solution operator of the linearized problem of model problems. For the bounded domain, we could show the unique existence of local in time solutions for arbitrary initial values. In order to consider the computer-assisted proof for the nonexistent range of the eigenvalues, we considered the approximation problem by the pressure stabilization method and showed the validity of the approximation.

研究分野：関数方程式

キーワード：Navier-Stokes方程式 重み付き空間 二相問題 最大正則性定理 Stokes半群の L_p - L_q 評価

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

流体力学の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式(以下 NS 方程式と呼ぶ)の数学的手法による本格的な解析は、1934 年 Leray の研究によって始まった。Leray は任意の初期データに対して時間大域的な弱解が少なくとも 1 つは存在することを示した。Leray による弱解の構成方法は Hopf により洗練された Hopf の手法はアプリアリ評価が解の存在を保証するというものであり、今日の非線形偏微分方程式論の基礎となっている。それから現在までの間、多くの人々によって研究されてきたが、Leray が構成した弱解の一意性や正則性については未だ解決をみていない。一方、一意的な強解の存在は、初期値や外力に制限をつけて知られている。

領域の形状に注目すれば、2 次元以上の全空間や半空間、外部領域などの領域で初期値が小さい場合に時間大域解の一意存在性が示されている。申請者のこれまでの研究において、半空間からの摂動で与えられる領域(以後、摂動半空間とよぶ)で、小さい初期値に対する時間大域解の一意存在性を示すことができている。これらは、対応するレゾルベント問題に対する解作用素のスペクトルを詳細に解析することで得られた、線形化方程式に対する解作用素(Stokes 半群)の評価を基に示される。また、応用上重要である未解決問題に定常解の安定性に関する問題がある。この解析には定常解を係数にもつ変数係数 NS 方程式を解析する必要があるが、定常解の無限遠での減衰が悪いため既存の Stokes 半群の評価を用いて示すことは難しい。申請者の研究により示された重み付き評価により、4 次元以上において変数係数方程式の係数を重み関数と考えることができたが解析が不十分であるため、3 次元における定常解の安定性問題を解決するまで至っていない。

二相問題の自由境界問題の解析は、半澤変換などを用いて時間依存する未知の境界を固定境界にすることから始まる。変換された方程式は主要項にも低階の非線形性を有する準線形型となる。従来では半澤理論と Duhamel の原理を用いるため時間に関する積分で特異性が現れてしまい解析が困難であったそのため、いくつかの結果はあるものの物理的に適合する結果は得られていなかった。最近では柴田氏により R 有界性を用いた議論から最大正則性原理が示され半群アプローチでは解決できなかった困難さを克服できている。柴田氏との共同研究により非圧縮性・圧縮性の二相流体に関する自由境界問題の線形化問題に対して R 有界性が道行かれ、最大正則性原理が示されている。しかし非線形問題への応用はまだできていない。

一方、複雑な境界をもつ有界領域での解析には数値解析が有用である。特に、数値誤差など計算機特有の誤差を考慮して解析を行うことで数学の証明を行うことができる計算機援用解析は特に有用である。現在のところ、定常問題を記述する楕円型方程式に対する計算機援用解析手法は確立されつつある。一方、非定常問題を記述する放物型方程式に対する数値解析はスペクトル理論を基盤とした手法など多くの手法が提案され、NS 方程式に対しては非線形性や圧力項の処理などの困難さを回避できる特性曲線圧力安定化法など多くの手法が提案されている。しかし、これらの手法は計算機援用解析にまで至っていない。

2. 研究の目的

本研究は、以下の 2 つの研究テーマについて研究を行う。

【研究 1】重み付き L_p 空間での Stokes 半群の解析とその非線形問題への応用

NS 方程式を解析する第一段階は、Stokes 半群を構成することである。全空間や外部領域、半空間や摂動半空間においては、重み付き L_p 空間でヘルムホルツ分解やレゾルベント評価が示されており、Stokes 半群の生成が示されている。第二段階は、その Stokes 半群の L_p - L_q 評価を導くことである。今までの共同研究により Stokes 半群の非斉次重みや斉次重みが付いた L_p - L_q 評価が示された。さらに、これらの評価を非線形問題に応用し、小さい初期値に対する時間大域解の一意存在性やその解に対する時間無限大での重み付き漸近挙動が証明されている。しかし、外部領域や摂動半空間では技術的な理由により重みに制限を課しているのが現状である。これは、それらの領域において局所的な領域での解析が不十分なため最良の重み付き L_p - L_q 評価が得られていないのが原因である。そこで、本研究では外部領域や摂動半空間を解析する上で重要な役割を果たす局所エネルギー減衰定理を再考し、最良の重み付き L_p - L_q 評価を得ることを考える。最良の評価が得られれば、それを非線形問題に応用し、時間大域解の重み付き漸近挙動を最良な形で得ることができる。また、この方法により他の領域(例えば、aperture domain など)への応用、半空間や摂動半空間での非等方的な重みを課した場合への応用、また重み付き L_p 空間よりも広い重み付き関数空間 Herz 空間での解析についても考察を行う。さらに、得られた重み付き評価を用いて Finn により提唱された定常解の安定性の問題を考える。

【研究 2】二相流体の自由境界問題のスペクトル解析とその非線形問題への応用

非圧縮性・圧縮性,ならびに圧縮性・圧縮性の二相流体の自由境界問題について考察を行う．非圧縮性・圧縮性の問題については全空間の線形化問題に対して R-有界性が導かれ最大正則性原理も示されている．これを cut-off テクニックを用いて有界領域に拡張する．さらに, 導かれた最大正則性を用いて, 非線形問題への応用を考える．特に, 二相流体の自由境界問題に対して任意の初期値に対する時間局所解や小さい初期値に対する時間大域解の一意存在性を示す．

圧縮性・圧縮性の二相流体に関する自由境界問題を柴田らとの共同研究の手法に従って全空間の場合から行う．その手法は自由境界問題に対応する線形化問題のレゾルベント問題を考え, その詳細な解表示をフーリエ・ラプラス変換を用いて求めることから始める．それにより得られた解表示を用いてスペクトルの非存在範囲を考えることで 線形化問題の解作用素の存在(半群の生成)とその評価, ならびに線形化問題に対する最大正則性原理を得ることができる．それを有界領域への拡張し, さらに非線形問題へのおうようを試みる．

以上の実解析的手法では一般論を用いて解析を行うため, スペクトルの非存在範囲を詳細に解析することが難しい．そこで有界領域においては計算機援用解析手法によるスペクトル解析も行う．スペクトルの非存在範囲の計算機援用解析は中尾らにより提案されている．この手法を参考に独自のスペクトルの非存在範囲の計算機援用解析手法を提案し 二相問題へ応用する．

3. 研究の方法

【研究1】重み付き L_p 空間での Stokes 半群の解析とその非線形問題への応用

L_p 空間での外部領域の Stokes 半群の評価は, 全空間での評価と局所エネルギー減衰定理を用いて cut-off テクニックにより示されている(岩下, 檀-小林-柴田)．一方, 重み付き L_p 空間でも, 同様の手法により外部領域での評価が得られている．しかし, 全空間での重み付き評価は最良な形の評価がすでに得られているが 外部領域での重み付き評価は L_p 空間で示されている局所エネルギー減衰定理と cut-off テクニックを用いて導かれているため, 技術的な制約がついている結果となっている．そこで, 本研究では 重み付き L_p 空間でも有用な局所エネルギー減衰定理の考察から始め, 外部領域において負べきの重みや異なる重みにも対応ができる Stokes 半群の最良な評価を得ることから始める．同様の手法により, 非斉次重みや半空間の法線方向の重みをもつ L_p 空間での解析, 楕円半空間での解析や重み付き L_p 空間よりも広い重み付き空間である Herz 空間での解析も行う．さらに, それらの非線形問題への応用を考える．

【研究2】二相流体の自由境界問題のスペクトル解析とその非線形問題への応用

非圧縮性・圧縮性の二相問題についてはすでに全空間において線形化問題の最大正則性原理が示されているので, cut-off テクニックを用いて有界領域への拡張を行うことから始める．さらに非線形問題への応用として表面張力がある場合とない場合についてそれぞれ任意の初期値に対する時間局所解や小さい初期値に対する時間大域解の一意存在性について考察を行う．

圧縮性・圧縮性の二相問題についても同じ手法で自由境界問題の線形化方程式に対する解作用素の R-有界性を示すことから始める．それにより Weis の作用素値 Fourier-multiplier 定理から最大正則性原理を導く．さらに cut-off テクニックを用いて有界領域にまで拡張する．

スペクトルの非存在範囲の計算機援用証明は, Orr-Sommerfeld 方程式等に対して中尾氏らの結果がある．この方法は楕円型方程式の解作用素の評価が重要な鍵となる．研究分担者である高安氏との共同研究により楕円型方程式の計算機援用解析手法の提案を行ってきた．中尾氏らの手法を参考にし, 高安氏との共同研究の手法を基に新しいスペクトルの非存在範囲の証明を考察する．

4. 研究成果

【研究1】重み付き L_p 空間での Stokes 半群の解析とその非線形問題への応用

非斉次重みをもつ重み付き L_p 空間においては 外部領域や楕円半空間において Stokes 半群の重み付き L_p - L_q 評価を導き, その非線形問題への応用として, 重み付き空間での時間無限大での減衰度を最良な形で得ることができた．重み付き L_p - L_q 評価は最良の局所エネルギー減衰定理を示すことで示された．その手法を用いて, 変形テンソルに対して Fourier 則ではなく Cattaneo 則を考慮した双曲型 Navier-Stokes 方程式の外部領域においても局所エネルギー減衰定理を導くことができた．また, 斉次重みをもつ場合や, 半空間において法線方向と接線方向で違う重みをもつ場合についても同様の評価を得ることができた．

半空間の定常問題については, 2次元半空間における定常解を再度見直した．2次元においてはフーリエ変換を用いて定常解の解表示を複雑ではあるが正確に得ることができたが 無限遠で

の減衰度が悪く，それを用いて2次元半空間でのNavier-Stokes方程式の定常解の存在を示すことができなかった．さらに外力に対称性などを仮定してより減衰を良くしようと試みたがうまくいかなかった．今後は考える関数空間を工夫し，定常解の存在証明を試みたい．

【研究2】二相流体の自由境界問題のスペクトル解析とその非線形問題への応用

非圧縮性・圧縮性，圧縮性・圧縮性の二相問題について，モデル問題の線形化問題の解作用素に対するR有界性を導くことができ，圧縮性・圧縮性の二相問題については，cut-offテクニックを用いて有界領域での任意の初期値に対する時間局所解の一意存在性を示すことができた．

詳しくスペクトルを解析するための固有値の非存在範囲に対する計算機援用解析を考察するために近似Navier-Stokes方程式の考察を行った．近似問題については，圧力安定化法による近似問題を選択し，その近似の正当性を証明することができた．有界領域においては，圧力安定化法による近似Stokes方程式は，コンパクトな摂動をもつ熱方程式となることが分かり，よい近似であることが示された．しかし，この問題に対してスペクトル解析を試みたいが，いまだスペクトル解析手法の提案までできていない．

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 9 件)

- (1) Kubo, R. Matsui, "On pressure stabilization method for nonstationary Navier-Stokes equations", *Communications on Pure and Applied Analysis*, 17 (2018), no. 6, 2283-2307. (査読有)
- (2) T. Kobayashi, T. Kubo, K. Nakamura, "On a Local Energy Decay Estimate of Solutions to the Hyperbolic type Stokes Equations", *Journal of Differential Equations*, 264 (2018), no. 10, 6061-6081. (査読有)
- (3) T. Kubo, Y. Shibata, K. Soga, "On some two phase problem for compressible and compressible viscous fluid flow separated by sharp interface". *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A*, (2016) 3741-3774(査読有)
- (4) T. Kobayashi, T. Kubo, "Weighted Lp-Lq estimates of Stokes semigroup in half-space and its application to the Navier-Stokes equations", *Advances in Mathematical Fluid Mechanics, Recent Developments of Mathematical Fluid Mechanics*, (2016). 337-350 (査読有)
- (5) T. Hishida, T. Kubo, "On the Asymptotic stability for small initial disturbance of Navier-Stokes flow in a two-dimensional aperture domain", *Gakuto International Series, Mathematical Sciences and Application, Mathematical Fluid Dynamics and Nonlinear Wave*, (2015) 183-192. (査読有)
- (6) T. Kobayashi, T. Kubo, "Weighted estimates of Stokes semigroup in unbounded domains", *Advanced studies in pure mathematics 64, Proceedings for the 4th MSJ-SI conference on Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations*, (2015), 427-436(査読有)
- (7) T. Kubo, Y. Shibata, K. Soga, "On the R-boundedness for the two phase problem: compressible-incompressible model problem", *Boundary Value Problem*, (2014):141, 33pp. (査読有)
- (8) T. Kubo, "On two phase problem: compressible -compressible model problem", 研究会"非圧縮性粘性流体の数理解析", 数理解析研究所講究録 1905(2014), 61-72.(査読無)
- (9) T. Kobayashi, T. Kubo, "Weighted Lp-Lq estimates of the Stokes semigroup in some unbounded domains", *Tsukuba J. Math.* Vol.37 No.2 (2013).179-205. (査読有)

〔学会発表〕(計 8 件)

- (1) T. Kubo, "Global well-posedness for some two phase problem: compressible-compressible case", 日本数学会秋季総合分科会, 2015年9月16日, 京都産業大学

- (2) T. Kubo, "Local well-posedness of the compressible-compressible two phase problem without surface tension", 日本数学会秋季総合分科会, 2015年9月16日, 京都産業大学
- (3) T. Kubo, "On some two phase problem for compressible-compressible viscous fluid flow", International Workshop on the Multi-Phase Flow; Analysis, Modelling and Numerics, 2015年11月12日, 早稲田大学
- (4) T. Kubo, "On some two phase problem for compressible-compressible viscous fluid flow", Fifth China-Japan Workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, 2015年11月18日, 武漢大学(中国)
- (5) T. Kubo, "On some two phase problem for compressible-compressible viscous fluid flow", Workshop on Hyperbolic and Dispersive PDEs in Sendai, 2015年12月17日, 東北大学
- (6) T. Kubo, "Weighted L_p - L_q estimates of Stokes semigroup and its application to Navier-Stokes equations", Ito Workshop on Partial Differential Equations. 2016年8月22日, 九州大学
- (7) T. Kubo, "Analysis of non-stationary Navier-Stokes equations approximated by the pressure stabilization method", 研究集会「流体と気体の数学解析」, 2018年7月5日, 京都大学数理解析研究所
- (8) T. Kubo, "非定常 Navier-Stokes 方程式に対する圧力安定化法について", 日本流体力学会年会 2018, 2018年9月3日, 大阪大学

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等 : <https://www.math.tsukuba.ac.jp/~tkubo/paper.htm>

6. 研究組織

(1) 研究分担者

研究分担者氏名： 高安 亮紀
ローマ字氏名： Takayusu Akitoshi
所属研究機関名： 筑波大学

部局名： システム情報系
職名： 助教
研究者番号(8桁): 60707743

(2)研究協力者
研究協力者氏名：
ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。