

令和 2 年 5 月 27 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04951

研究課題名(和文)非線形楕円型方程式の線形化問題に関する新展開

研究課題名(英文)New developments on linearized problems of nonlinear elliptic equations

研究代表者

大塚 浩史(Ohtsuka, Hiroshi)

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号：20342470

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：Gel'fand問題と呼ばれる非線形偏微分方程式を中心に、その解の爆発現象の詳細な挙動を解明することに取り組んだ。特に、共形場理論に関する「Rellichの等式」の活用限界を把握することを目指し計算を進めた。研究計画に従って計算結果は得られたが、残念ながらそれは期待した高い精度のものではなかった。しかし、状況を打開するために物理学者と共同研究を進め、方程式を統計力学の観点から考察し直し、線形応答理論という物理理論に基づく考察を進め、研究対象の離散近似として新規性のあるものを見出した。これは、対象とした現象に接近する新たな道を開いたと考えられる。

研究成果の学術的意義や社会的意義

残念ながら解明を目指した事実を示すには十分な結果は得られなかったが、改めて2次元 Gel'fand問題を共形場理論や点渦系など幾何学や統計力学の観点から幅広く考察することで、豊かな構造を発見することができた。高次元Gel'fand問題にも統計力学的な観点が存在することは知られている。今後本研究課題の対象分野を進展させる可能性がある、新たな視点を発掘できたと考えている。なお、線形応答理論に基づく数学研究は少なく、得られた観点は当初の目標以上の展開を期待できると考えている。数学者と物理学者の共同研究も必ずしも一般的ではないので、双方にとって新規性のある分野融合型の共同研究の進展も期待できる。

研究成果の概要(英文)：Focusing on the nonlinear partial differential equation called the Gel'fand problem, I worked on clarifying the detailed behavior of the blow-up phenomenon of the solution of nonlinear partial differential equations. In particular, I aimed to clarify the practical limits of "Rellich's equation" related to conformal field theory. Calculation results were obtained according to the research plan, but unfortunately it was not as accurate as expected. However, in order to break the situation, I conducted joint research with physicists, reconsidering equations from the viewpoint of statistical mechanics, and proceeding with consideration based on the physical theory called linear response theory, and I found a novel discrete approximation of the research object. I believe that this have opened a new way to approach the phenomenon of interest.

研究分野：変分問題

キーワード：Gel'fand問題 解の爆発 Rellichの等式 点渦 渦点 平衡統計力学 線形応答理論

1. 研究開始当初の背景

非線形楕円型偏微分方程式は、様々な現象の定常状態を表すことに用いられている。定常状態は「温度」などのパラメータで特徴付けられるが、これは、方程式がパラメータを含むことを意味する。このような問題で、パラメータを変化させてある値に近づけたとき、対応する方程式の解が「爆発」することがしばしば観察されている。「爆発」とは、解の最大値が発散することである。「爆発」を知ることは解集合の「境界」を知ることであり、解集合の大域的な全体像を知る手がかりになる(図1)。解集合の詳細な構造が分かることは、背景にある現象の深い理解に繋がる。

申請者はこれまで、2次元平衡乱流に関する Onsager 理論を研究してきた(Onsager, 1949, Nuovo Cimento Suppl.)。この理論は、2次元完全流体において、大規模な構造が持続して存在する現象を、点渦系に関する統計力学的性質として捉える理論である。例えば、木星の大赤斑や、一様磁場内に閉じ込められた電子ガスに生じ得る電子の局在などが対象となる現象だが、その最も単純なモデルは、Gel'fand 問題(図1)と呼ばれる2次元の非線形楕円型境界値問題である。Gel'fand 問題は、非線形項が指数関数で表される半線形方程式の Dirichlet 問題であるが、点渦系以外にも、曲面論、古典的場の理論、粘菌の凝集過程(走化性方程式)など、数学、物理学、生物学にわたる多方面に現れることが知られている。

Gel'fand 問題は一つのパラメータ(図1の)を含むが、点渦系ではこのパラメータは、極めて多数の点渦からなる点渦系の平衡状態の、温度に関連する量であることが知られる。また、方程式の右辺は点渦の分布関数に比例する関数を表すが、方程式の解が「爆発」することは、右辺が Dirac の関数(の線形和)に近づくことに対応している(Nagasaki-Suzuki, 1990 Asympt. Anal.)。また、このような挙動の解の族も構成されている(Baraket- Pacard, 1998 Calc. Var. PDE)。これらのことは、点渦が有限個の点の周りに凝集して存在する状態、すなわち、大赤斑や電子の局在のような状態が現れ得ることを示唆している。この数学的事実がどのような意味で現実を再現しているのか考察を進める為は、出来る限り挙動を詳細に調べることが求められている。

このような動機のもと、本研究課題申請当時、Gel'fand 問題の爆発に近づきつつある解に関する線形化作用素の固有値・固有関数の挙動の解析を進めていた。具体的には、解の漸近的非退化性(Gross-Suzuki-Ohtsuka, 2011 Adv. Differ. Eq.)、解の Morse 指数(Gladioli-Grossi-Ohtsuka, 2014 Commun. PDE)、固有関数の具体的な形状と固有値の詳細な挙動(Gladioli-Grossi-Ohtsuka, 2016 Annali di Mat. Pure ed Appl.)などの結果を得ていた。またこれらの研究を進める過程で、解析手法の改良を続け、「Rellich の等式」と呼ばれる関数等式の新たな活用方法を見出すことができた(2014)。特に、問題を考えている領域と爆発点から定まる行列を見出し、その行列の固有値・固有関数により線形化作用素の固有値・固有関数の挙動が定まることを示した(2016)。この結論は類似するものが他に見られず、この手法の様々な観点からの分析がこの分野の課題の一つと考えられた。

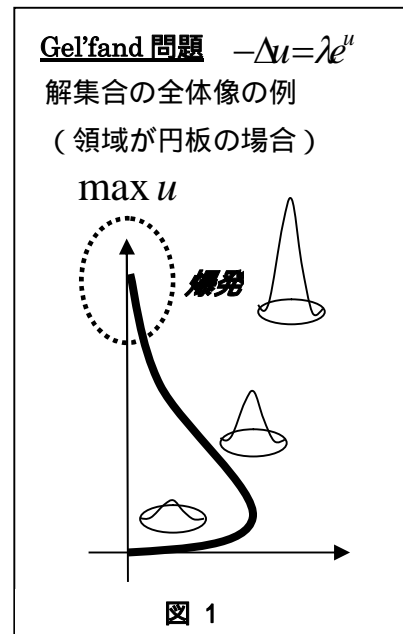


図 1

2. 研究の目的

「Rellich の等式」による解析と最も親和性がある非線形方程式は、非線形項が指数関数のものである。また、2次元の Gel'fand 問題は、曲面の共形変形に関わる幾何学的な背景があり、「Rellich の等式」も共形変形との関わりが深い。これらの観点から、既に爆発現象が観察されている次のような Gel'fand 問題の拡張問題において、線形化作用素の固有値・固有関数の挙動を考察し、2次元領域で得られた結論の数学的本質を理解することが目的であった：

- (1) 4次元領域における、 $(-\Delta)^2 u = \lambda e^u$ を考察し、結論に対する次元による影響を明らかにする。また結論は、可能な限り $2m$ 次元における $(-\Delta)^m u = \lambda e^u$ の場合に拡張し、普遍性を確認する。
- (2) 2次元の Gel'fand 問題を曲面上で考察し、結論に対する曲率などの影響を明らかにする。
- (3) (1)(2)を合わせた拡張として、4次元多様体において、重調和作用素を主部を持つ共形不変な作用素である Paneitz 作用素で Gel'fand 問題の類似問題を考察し、結論に対する次元、曲率などの影響を統一的に明らかにする。また結論は可能な限り、 $2m$ 次元多様体上に一般化された Paneitz 作用素の場合に拡張し、結論の普遍性を確認する。

3. 研究の方法

2.(1)(2)に関して研究を進めつつあったので、これら研究を共同して進めてきた研究者を連携研究者として配置し、引き続き共同研究を進めた。(1)について高橋太氏(大阪市立大)、(2)について佐藤友彦氏(日本大学)である。また、これまで関係を構築してきた内外の研究者の動

向を参考に、類似の問題に柔軟に取り組み、本研究の問題点の特殊性を理解することに努めた。具体的には、京都大学数理解析研究所における研究集会を始めとする国内外の学会、研究集会、セミナーへの参加と講演、共同研究をしていた Francesca Gladiali 氏 (Sassari 大学)、Massimo Grossi 氏 (Roma “La Sapienza” 大学) との議論のためのイタリア出張 (2017 年 1 月) 更に、得られる可能性がある解析結果を探るために、物理学者である八柳 祐一氏 (静岡大) 羽鳥尹承氏 (元核融合研究所) との共同研究を並行して進めた。

4. 研究成果

残念ながら、当初の計画の遂行は難航した。数学的に最も興味深く、研究の起点となる 2.(1) を重点的に研究したが、それまでの高橋太氏との共同研究結果 (2015, Differential and Integral Equations) では達成できなかったことに取り組んだ。すなわち、4 次元、重調和作用素の場合の高次元 Gel'fand 問題に関する、線形化作用素の漸近的非退化性である。これは、2 次元の場合との形式的な類推から、Gel'fand 問題およびその線形化問題の解のパラメータに関する漸近展開を高精度で得ることで達成できることが分かっていたが、この展開係数の評価に「Rellich の等式」を活用出来ることも申請当時に認識していた。「Rellich の等式」は、Bozhkov-Mitidieri (2007 Mediterr. J. Math) などにより、conformal Killing vector field と呼ばれる特別なベクトル場と、Laplace 作用素、重調和作用素などの微分作用素との交換子から導かれることが知られているが、重調和作用素の漸近展開の展開係数を導く特別な conformal Killing vector field も発見していた。採択後、計算が長大で計算結果を確定するのに数年要してしまっただが、残念ながら、係数が漸近的に 0 に近づくという既知の事実と矛盾していないが、そのオーダーを特定できず、高精度な漸近展開を得ることはできなかった。途中、高橋氏、佐藤氏、Gladiali 氏、Grossi 氏らの示唆も参考にして具体例などを考察したが、同様だった。

このような状況に備え、当初から物理学者である八柳 祐一氏 (静岡大) 羽鳥尹承氏 (元核融合研究所) との共同研究を進めてきた。二人は、Gel'fand 問題の、離散化した実験系と捉えられる点渦系について、スーパーコンピュータで数値実験に取り組む理論家である。彼らの数値実験結果、それに対応する実験結果に関する情報交換を行い、Gel'fand 問題の線形化問題の解の挙動について情報を得ることに務めた。これは、少なからず成果があった。

八柳氏、羽鳥氏は、平衡点渦系の平均場における 2 体相関関数と呼ばれるものを確定することを考察しているが、これは、**線形応答理論**という統計物理学の理論で得られると考えられている。羽鳥氏は、線形応答理論を駆使して、この相関関数が満たすべき式が、Gel'fand 問題の非斉次線形化問題であることを導いた。残念ながら羽鳥氏の議論は数学としては分かりにくいものであったが、共同研究を進めることで、前提としていたと思われる仮定を明確にすることができた。その仮定とは、点渦数を無限大にすることと、系を摂動するという二つの極限操作の可換性である。一方八柳氏は、羽鳥氏の結論から得られた相関関数の形を支持する数値実験結果を得た。これらの事実は物理学として意義があると考え、物理学分野の学会などで発表したが、他の物理学者から、仮定したこと物性論的意味を指摘されるなど、多くの示唆を得ることができた。

このような物理学者との共同研究の成果をもとに、点渦系の摂動系というものを考察した。そして本研究課題の最終年度には、その点渦の数を無限大にした極限に現れる連続的な点渦の分布関数が満たす方程式として、Gel'fand 問題の摂動問題が現れることを証明した (論文として投稿し、2020 年 4 月に掲載が受理されている)。この摂動問題の摂動に関するガトー微分が Gel'fand 問題の線形化問題である。形式的には、点渦系の摂動系について、摂動に関するガトー微分を考察することで、本研究課題の研究対象である、Gel'fand 問題の線形化問題の離散近似 (粒子近似) が得られたことになる。なお、Gel'fand 問題の線形化問題に限らず、このような視点による偏微分方程式研究はあまり知られていないと考えている。

以上、計画通りに研究を進めたが、予想されていた結論に矛盾はしないが、残念ながら、解明を目指した事実を示すには十分な結果は得られなかった。しかし、改めて 2 次元 Gel'fand 問題を、共形場理論や点渦系など幾何学や統計力学の観点から幅広く考察し、豊かな構造を発見することができた。高次元 Gel'fand 問題にも統計力学的な観点が存在することは知られている。今後本研究課題の研究分野を進展させる可能性がある、新たな視点を発掘することができたと考えている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件（うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Hiroshi Ohtsuka	4. 巻 未定
2. 論文標題 On the derivation of the mean field equation of the Gibbs distribution function for equilibrium vortices in an external field	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

〔学会発表〕 計10件（うち招待講演 8件/うち国際学会 7件）

1. 発表者名 Hiroshi Ohtsuka
2. 発表標題 On the linear response of equilibrium vortices
3. 学会等名 第44 回偏微分方程式論札幌シンポジウム（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Ohtsuka
2. 発表標題 On the impulse response for solutions of two-dimensional Liouville type equations
3. 学会等名 RIMS 共同研究（公開型）「偏微分方程式の臨界現象と正則性理論及び漸近解析」（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 大塚浩史
2. 発表標題 2次元Liouville 型方程式の解のインパルス応答の詳細な構造について
3. 学会等名 RIMS 共同研究（グループ型）「反応拡散方程式と非線形分散型方程式の解の挙動」,（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Hiroshi Ohtsuka , Tadatsugu Hatori, and Yuichi Yatsuyanagi
2. 発表標題 On the precise structure of the impulse response for solutions of two-dimensional Liouville type equations
3. 学会等名 13th SIAM East Asian Section Conference 2018 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Hiroshi Ohtsuka , Tadatsugu Hatori, and Yuichi Yatsuyanagi
2. 発表標題 On the impulse response for solutions of two-dimensional Liouville type equations
3. 学会等名 The 12th AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications SS93: Recent trends in nonlinear PDEs (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 大塚浩史, 八柳 祐一, 羽鳥尹承
2. 発表標題 2次元Liouville型方程式の解のインパルス応答の詳細な構造について
3. 学会等名 日本流体力学会年会
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 大塚浩史
2. 発表標題 On the asymptotic behavior of the solutions for the linearized biharmonic Liouville-Gel'fand problem in dimension four
3. 学会等名 第8回拡散と移流の数理 (招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hiroshi Ohtsuka
2. 発表標題 Local asymptotic nondegeneracy for multi-bubble solutions to the biharmonic Liouville-Gel'fand problem in dimension four
3. 学会等名 Roma Caput PDE (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 Hiroshi Ohtsuka
2. 発表標題 On the behavior of eigenfunctions for the linearized Gel'fand problem
3. 学会等名 7th Euro-Japanese Workshop on Blow-up (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Hiroshi Ohtsuka
2. 発表標題 On the fine asymptotic behavior of the solutions for the linearized Gel'fand problem
3. 学会等名 Geometry of solutions of PDE's and its related inverse problems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

大塚浩史のホームページ
<http://www.bea.hi-ho.ne.jp/pickles/mp/>
 金沢大学研究者情報
http://ridb.kanazawa-u.ac.jp/public/detail.php?id=4197&page=2&org2_cd=340200

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	八柳 祐一 (Yatsuyanagi Yuichi) (30287990)	静岡大学・教育学部・准教授 (13801)	
研究協力者	羽鳥 尹承 (Hatori Tadatugu)	核融合研究所・名誉教授	
連携研究者	高橋 太 (Takahashi Futoshi) (10374901)	大阪市立大学・理学(系)研究科(研究院)・教授 (24402)	
連携研究者	佐藤 友彦 (Sato Tomohiko) (50397676)	日本大学・生産工学部・准教授 (32665)	