様　式　C－19、F－19－1、Z－19　(共通)

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 30 年　 6 月 19 日現在

機関番号：13801
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2017
課題番号：15K04953

研究課題名（和文）遅延フィードバック制御における安定化理論の構築とその応用

研究課題名（英文）Construction of the stabilization theory in the delayed feedback control and its applications

研究代表者
宮崎　倫子（Miyazaki, Rinko）

静岡大学・工学部・教授

研究者番号：40244660

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：遅延フィードバック制御（DF制御）法の理論的枠組みの構築を目的として，2011年の我々の成果における制約を緩和することと遅延誤差を含む場合の解析に取り組んだ．完全なる解決には至らなかったが，新たなる3つの成果を得た．(1)離散時間システムに対する遅延フィードバック制御において，1ステップ時間進めた遅延フィードバック制御（EchoタイプDF制御）が有効であることを示した．(2)ゲインが単位行列の実数倍に限るが，DF制御によって安定化可能な周期解のFloquet乗数の必要十分条件の証明．(3)Banach空間上の周期発展作用素から生成される周期的非同次項をもつ線形方程式の周期解の存在条件の証明．

研究成果の概要（英文）：For the purpose of construction of the theoretical framework of the delayed feedback control method, we engaged two themes, relaxing the restrictions to the gain in our results in 2011 and the analysis of the case which includes errors in the delay. Although we had not obtained the perfect solution, we could three new results. (1) We prove that Echo type of DF control which is a delayed feedback control with 1 advanced step time is effective. (2) We prove the necessary and sufficient condition of the Floquet multipliers of the periodic solution for DF control to be successful. (3) We prove that the existence of periodic solutions of nonhomogeneous linear systems generated from a periodic evolutionary process.

研究分野：関数微分方程式論

キーワード：遅延型微分方程式　関数方程式　周期系　安定性　制御

１．研究開始当初の背景

従来，微分方程式における遅延（タイムラグ）は，解の不安定性あるいは振動性をもたらすものとしてとらえられてきていた．特に，Mackey and Glass (Science, Vol. 197, 1977) によって提示された白血球の生成を示す数理モデルは，1 次元自励系方程式であっても時間遅れの影響によりカオス的な解挙動が得られる例としてよく知られている．

一方，Pyragas (Physics Letters A, Vol. 170, 1992) は，カオスアトラクタに埋め込まれた不安定周期軌道を安定化する方法として，Delayed Feedback 制御法（以下 DF 制御法と呼ぶ）を提案した（図１）．これは，態と現在の状態の差を，フィードバック入力として利用するものである．

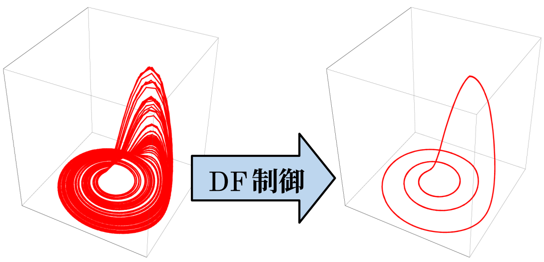

図 1．Rössler 方程式への DF 制御の適用例

DF 制御法は，手法的な簡便性から様々な分野で応用（利用）されている．理論的（解析的）結果については，1997 年に示された「奇数制約条件」が応用分野の研究者の間で長らく受け入れられてきた．しかし，我々はその証明が数学的に不完全であると考えていた．そして，2007 年に Fiedler らによって「奇数制約条件」に対する反例（数値的）が示され，確固たる解析的結果というものが存在しない状況が長らく続いている．

そのような中，我々は，2005 年から 2008 年度および 2010 年から 2014 年における科研費助成により，ゲイン行列として単位行列の実数倍とした特殊な条件下においてではあるが，DF 制御が成功するための条件の導出に成功した（SIAM J. Math. Anal., Vol. 43, 2011）．しかし，この結果は非常に限定的なものである．例えば，Pyragas によって最初に DF 制御法が提示された Rössler 方程式への適用例（図 1）ですら，上記結果の適用外である．しがたって，さらなる継続・発展的研究の着手が必要であった．

２．研究の目的

DF 制御法に対する実用可能な理論的裏づけを行うことである．上述の通り，これまでの研究によって，ゲイン行列として単位行列の実数倍という前提条件のもと，基礎的理論整備に成功した．しかし，その結果はゲインに対する前提条件が限定的であるため，実用的ではない．また，遅延を安定化させたい周期に正確に一致させるという点においても，実用的ではない．本研究においては，より実用性を重視した理論の構築を目指すものである．その際，遅延微分方程式に対する定性的理論を用いることになるが，応用分野の研究者も容易に使える計算スキームを併せ持つような理論の整備を行うことを目的とする．

３．研究の方法

数学的解析だけでは，困難な場合が予想されるので，必要に応じて数値シミュレーションによる予測を行う．その結果をもとに，既存の遅延微分方程式の定性的解析手法や，あるいは必要に応じて新たに手法を開発して用いる．具体的手順は以下のとおりである．

(1) 数値シミュレーションにおいては，特に Fiedler による奇数条件に対する反例や，Pyragas が DF 制御を初めて提示した Rössler 方程式など，基本的なものに限定する．

(2) (1)で得られたケースについて，安定化できるゲインや周期解の Floquet 乗数を数値的に特定し，そのケースについての解析を試みる．解析には，遅延微分方程式に対する Folquet 乗数の定義に従って，それらが満たす関係式（特性方程式）を導出する．

(3) (2)でうまくいかない場合には，遅延微分方程式の周期解の安定性に関して，Floquet 理論以外の既存の結果で適用できるものはないか検討を行う．

４．研究成果

本研究の第一の目的である，我々の 2011 年の成果におけるゲインに対する前提条件を取り除いた場合の解析については，論文成果として発表できる結果は残念ながら得られなかった．その際に障害となったのは，DF 制御法の解析においては，遅延微分方程式における Floquet 乗数，あるいは，それらが満たす関係式（特性方程式）の導出において，困難を極めたためである．本研究目的を達成すべく，試行錯誤する中で，以下の通り付随的な結果が得られた．

(1) 解析が困難である理由の一つに線形の遅延微分方程式の相空間が無限次元であることが挙げられる．そこで，離散時間システムに対する DF 制御についても，同時に検討を行った．その際，我々の 2011 年の SIAM

に発表した成果とパラレルな解析が可能となるのは，離散時間システムの DF 制御として通常よく使われているものではなく，1 ステップ時間進めた遅延フィードバック制御（Echo タイプ DF 制御）の場合であることが確信できた. この成果については, 2018 年 8 月までに論文にまとめて投稿する予定である.

離散時間システムに対する DF 制御についても，Pyragas 以来数多くの研究がなされてきている．しかし，我々が提案する Echo タイプ DF 制御法に関する研究は，我々の知る限りほとんど存在しない．これを，異端な結果と考えることもできるが，連続系の解析との対応から，我々は，Echo タイプ DF 制御法がより自然であると考えている.

(2) ゲインに対する条件をはずし，数値的に検証していく中で，ゲインの条件だけではなく，安定化可能な不安定周期軌道の Folquet 乗数の条件を精査した. その結果，依然として，ゲインに対する前提条件は残ったままであるが，安定化可能な Floquet 乗数の必要十分条件（図 2）を得ることができた．この結果についても，現在論文執筆中である.

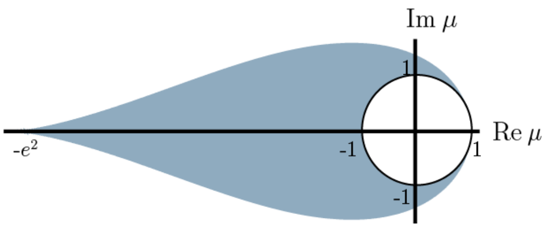

図 2．安定化可能な Foloquet 乗数

背景でも述べたが， DF 制御の解析的結果として Fiedler らの反例が出るまでは「奇数制約条件」が知られていた．これは，「1 より大きな Foloquet 乗数を奇数個もつ周期解は安定化できない」というものであった．我々の結果からは，単位行列の実数倍というゲインを用いた場合ではあるが，「1 より大きな Folquet 乗数を一つでももつ周期解は安定化できない」ということがわかる. したがって，奇数制約条件の反例とはならない．しかし,「奇数個」ということに大きな意義は見いだせないことがわかる.

(3) 本研究目的の二つ目として，遅延に誤差が含まれた場合の検討がある．この場合については，安定性解析以前に，周期解の存在から証明しなければならない．その取り組みの中で, Banach 空間上の周期発展作用素から生成される周期的非同次項をもつ線形方程式の周期解の存在条件を証明するに至った．その成果については，J. Korean Math. Soc. に発表済みである.

この結果は, Duffing 方程式のような周期的強制外力項をもつシステムに対して DF 制御を加えた場合につながる可能性をもつが, DF 制御項自体を周期的発展作用素の中に取り組む必ことが課題として残されている.

今後の課題として, 遅延微分方程式の数値解から得られる離散データをもとにして，計算されたフーリエスペクトルや Floquet 乗数について，その信頼性やその計算手順を理論的に整備することである．現時点では, DF 制御法という限られたタイプの遅延微分方程式であっても，Floquet 乗数を算出するための根拠となる特性方程式は初等的には記述できていない．そのような中，周期解の存在や安定性評価方法として，応用分野においてはフーリエスペクトルや遅延微分方程式の Floquet 乗数を数値的に提示するといった手法が用いられている．そういった研究手法の理論的裏付けも急務である.

5．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　1 件）

① Dohan Kim, Rinko Miyazaki, Toshiki Naito and Jong Son Shin, Solutions of Higher Order Inhomogeneous Periodic Evolutionary Process, J. Korean Math. Soc., Vol. 54, 2017, 1853-1878, 査読有. https://doi.org/10.4134/JKMS.j160748

〔学会発表〕（計　5 件）

① 横井伸行，宮崎倫子，Pyragas 型遅延フィードバック制御における特性乗数の解析について，統計数理研究所　数学協働プログラム「ゆらぎと遅れを含む力学の数理と応用２」，微分方程式論ワークショップ岐阜, 2017 年.

② 宮崎倫子，遅延フィードバック制御による安定化とその解析について，北陸応用数理研究会 2017，2017 年.

③ Dohan Kim, Rinko Miyazaki and Jong Son Shin, Boundedness of Solutions in Periodic Continuous Linear Systems, International Conference for the 70th Anniversary of Korean Mathematical Society，2016 年.

④ 宮崎倫子, 時間遅れと安定性, 常微分方程式の定性的理論ワークショップ，2016 年.

⑤ Rinko Miyazaki，Stability induced by time delays and its analysis，統計数理研究所　数学協働プログラム「ゆらぎと遅れを含む力学の数理と応用２」， 2015 年.

６．研究組織

(1)研究代表者
宮崎　倫子（MIYAZAKI, Rinko）
静岡大学・工学部・教授
研究者番号：40244660

(2)研究分担者
内藤　敏機（NAITO, Toshiki）
電気通信大学・その他部局等・名誉教授
研究者番号：60004446

泰中　啓一（TAINAKA, Kei-ichi）
静岡大学・創造科学技術大学院・客員教授
研究者番号：30142227

(3)連携研究者
無し

(4)研究協力者
申　正善（SHIN, Jong Son）
法政大学・非常勤講師