

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 6 日現在

機関番号：16301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04959

研究課題名(和文) 磁場をもつ相対論的ハミルトニアンの特異値解析

研究課題名(英文) Spectral analysis of relativistic Hamiltonians with a magnetic field

研究代表者

伊藤 宏 (Ito, Hiroshi)

愛媛大学・理工学研究科(工学系)・教授

研究者番号：90243005

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：相対論的量子力学で重要なハミルトニアンであるディラック作用素および相対論的パウリ作用素の特異値とレゾナンス(複素固有値)の解析を目的とした。磁場ポテンシャルは有界であり、電場ポテンシャルは無界とし、さらに伸張解析を仮定した。まず、これらの作用素を複素化したハミルトニアンの特異値から特異値の性質を調べ、その後レゾナンスの非存在領域を求めた。さらに、光速を無限大にすることで、それらのレゾナンスが対応するパウリ作用素のレゾナンス(または固有値)に収束することも示した。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this work is to study the spectral properties and resonances (complex eigenvalues) of Dirac operators and relativistic Pauli operators, which are important Hamiltonians in the relativistic quantum mechanics, with a bounded magnetic potential and an unbounded electric potential. We also assume that these potentials are dilation analytic. We first study their spectral properties by using the complex scaled Hamiltonians, and then obtain some resonance-free-region. Moreover, we show that each resonance converges to a resonance (or eigenvalue) of the corresponding Pauli operator as the velocity of light goes to infinity.

研究分野：量子力学における特異値理論および数学的散乱理論

キーワード：ディラック作用素 パウリ作用素 レゾナンス 非相対論的極限

1. 研究開始当初の背景

相対論的量子力学においてディラック作用素は重要な役割を果たし、物理学のみならず数学の分野においても非常に多くの研究がなされてきた。シュレーディンガー作用素（非相対論的量子力学における中心的なハミルトニアン）との類似点も多いが、シュレーディンガー作用素は単独の微分作用素であるのに対し、ディラック作用素は微分作用素系であるため、シュレーディンガー作用素とは異なる興味深い結果が存在する。その1つが、遠方で発散するポテンシャルをもつ場合である。シュレーディンガー作用素の場合は、スペクトルとして離散固有値のみをもつが、ディラック作用素では実軸全体がスペクトルとなる。伊藤宏（研究代表者）は、山田修宣（連携研究者）と平成 21~23 年度の科学研究費（基盤研究(C)21540187）による研究において、相対論的シュレーディンガー作用素を介在することで、そのスペクトル構造を解明した。さらに、光速が無限大になる非相対論的極限において、ディラック作用素のレゾナンスが2種類のシュレーディンガー作用素の固有値またはレゾナンスに収束することを示した。その後、伊藤宏（研究代表者）は、平成 24~26 年度の科学研究費（基盤研究(C)24540176）による研究において、有界な磁場ポテンシャルを付加した場合に、同様の結果が得られることを示した。ただし、非相対論的極限においては、シュレーディンガー作用素の代わりに、パウリ作用素が置き換わる。

2. 研究の目的

この研究の当初の目標は、以下の3つであった。

- (1) 電場と磁場の大きさの違いにより、スペクトルやレゾナンスにどのような違いが現れるのかを解析すること。
- (2) 遠方で発散するポテンシャルが球対称に近い場合には、連続スペクトルに埋め込まれた固有値は存在しないことが知られていた。この研究で用いられている遠方で発散する解析的なポテンシャルの場合にも埋め込まれた固有値が存在しないかを調べる。
- (3) 原点で特異なアハラノフ・ボームポテンシャルを付加した場合にはスペクトルやレゾナンスにはどのような影響があるかを調べる。

3. 研究の方法

(1) 「作用素論セミナー」(京都大学)、「解析セミナー」(愛媛大学)などの定期的なセミナーや、「夏の作用素論シンポジウム」、「超局所解析と古典解析」、「愛媛大学スペクトル・散乱セミナー」などのシンポジウム、「日本数学会」を主に利用し、連携研究者との研究連絡や他の研究者との情報交換などを行った。また、「夏の作用素論シンポジウム」、「超局所解析と古典解析」、日本数学会函数解析分科会一般講演、「臨時作用素論セミナ

ー」、「応用解析研究会」などで研究成果を発表した。さらに、課題研究に係る研究者にこれらのセミナーやシンポジウムに参加してもらい、講演や議論を行ってもらった。

(2) 課題研究のために必要な書籍やパソコンとその周辺機器および数学用ソフトを購入した。パソコンにより、最新の研究の情報収集や文献の整理などを行った。また、数学ソフトにより得られた結果を数値計算し、視覚化することが出来、理解が深まった。

(3) 研究代表者や連携研究者は、以下の役割分担で課題研究やその周辺に関する研究を行った。

伊藤 宏（研究代表者）

相対論的パウリ作用素とディラック作用素のレゾナンスの存在・非存在領域の決定と磁場を入れたときの解析。

山田修宣（連携研究者）

閾値における固有値の非存在の証明。

田村 英男（連携研究者）

複数のデルタ型磁場をもつシュレーディンガー作用素のレゾナンスの解析。

岩塚 明（連携研究者）

磁場をもつ2次元ディラック作用素のスペクトルの解析。

野村 祐司、峯拓矢（連携研究者）

ランダムなアハラノフ・ボームポテンシャルをもつシュレーディンガー作用素の解析。

安藤和典（連携研究者）

離散シュレーディンガー作用素の逆問題の解析。

4. 研究成果

(1) 主な結果

研究代表者(伊藤)による主な結果を述べる。

3次元ディラック作用素を考える。磁場ポテンシャルは有界、電場ポテンシャルは遠方で発散するものとする。さらに、電場ポテンシャルの摂動項と見なせる行列値ポテンシャルも付加する。すべてに伸張解析性を仮定する。これらの条件のもと、ディラック作用素を作用素として解析接続することで(作用素の複素化)、非自己共役なディラック作用素が定義でき、その固有値はレゾナンスと呼ばれる。

Foldy-Wouthuysen-Tani 変換 (FWT 変換) を行なうことで、ディラック作用素は2種類の相対論的パウリ作用素の直和からなる主要部と摂動項の和に変換できる。

この研究では、相対論的パウリ作用素とディラック作用素のスペクトルやレゾナンスおよび非相対論的挙動を解析した。相対論的パウリ作用素はパウリ作用素の平方根で定義され、通常の微分作用素とはならないため解析が困難である。磁場がない場合には相対論的パウリ作用素はよく知られた相対論的シュレーディンガー作用素となる。

相対論的パウリ作用素に関する結果

1つの相対論的パウリ作用素 $L(+)$ は、離散スペクトルのみをもち、虚数のレゾナンスはもたない。もう一方の相対論的パウリ作用素 $L(-)$ のスペクトルは実軸全体であり、埋め込まれた固有値は存在したとしても離散的であり、多重度は有限である。特異連続スペクトルは存在しない。さらに、レゾナンスが存在すれば、閉上半平面にしか存在しない。また、実のレゾナンスは固有値である。

磁場がない場合には、電場ポテンシャルを解析接続した複素ポテンシャルの虚部が非負であれば、 $L(-)$ は固有値を持たない。

$L(-)$ のレゾナンスは、ある扇形領域と上半平面の共通部分以外には存在しない。この扇形領域は、ある典型的なポテンシャルの場合には最良である。

光速を無限大にすると $L(+)$ の固有値 ($L(-)$ のレゾナンス) は、対応するパウリ作用素 $P(+)$ の固有値 ($P(-)$ のレゾナンス) に収束する。

ディラック作用素に関する結果

ディラック作用素のスペクトルは、上に述べた相対論的パウリ作用素 $L(-)$ と同じ性質をもつ。

ディラック作用素のレゾナンスは、ある扇形領域内以外には存在しない。さらに、その扇形領域の内部にレゾナンスが存在しない有界領域が存在する。その領域の面積は光速の4乗に比例する。

光速が十分大きいならば、上で述べたパウリ作用素 $P(+)$ の固有値 ($P(-)$ のレゾナンス) の近くにディラック作用素のレゾナンスが存在する。

平成 21~23 年度の科学研究費 (基盤研究 (C)21540187) による研究および平成 24~26 年度の科学研究費 (基盤研究 (C)24540176) では、光速が非常に大きいという仮定のもとでレゾナンスを解析していたが、この研究では光速の大きさに条件は付けず、出来るだけ光速に関して一様な結果を得るように努めた。そのため、以前の研究と比べ、詳細な解析が必要であり、楕円型評価に関する新しい評価も得ることが出来た。相対論的パウリ作用素に関する結果は、2017 年に Publ. Res. Inst. Math. Sci. に掲載された。また、ディラック作用素に関する結果は論文としてまとめられており、現在投稿中である。

当初、電場より強い非有界な磁場ポテンシャルやアハラノフ-ボームポテンシャルもつディラック作用素の解析を試みたが、相対論的パウリ作用素の解析で困難にぶつかり、十分な進展が見られなかった。しかし、埋め込まれた固有値の非存在に関する研究では、相

対論的パウリ作用素に関しては新しい十分条件を見つけることが出来た。

(2) 国内外における位置づけとインパクト

レゾナンスの解析は、様々な問題に関して活発に研究されている。実際、遠方で減衰するポテンシャルをもつシュレーディンガー作用素やディラック作用素のレゾナンスに関する研究は、国内外とも多くの研究がある。特に、準古典極限における研究は偏微分方程式の理論と関わりがあり、多くの論文が出版されている。一方で、遠方で発散するポテンシャルをもつディラック作用素では、スペクトルの性質が調べられているが、まだ十分な解析は行われてこなかった。さらに、レゾナンスに関する研究はわずかしかない。非有界なポテンシャルをもつ相対論的パウリ作用素のレゾナンスに関する研究は研究代表者の知る限り、まだ存在しない。この研究で実際に解析しているのは、複素化した非自己共役作用素であり、複素化した作用素を解析することで、もとの自己共役作用素に関する情報を得ようとする新しい試みである。最近、国外での量子力学のスペクトル・散乱理論での研究において、非自己共役作用素に関する研究が活発になってきている。これらのことを考えると、この研究成果は今後のこれらの研究分野に大きく貢献する可能性がある。

(3) 今後の展望

この研究は、非自己共役作用素のスペクトル解析である。非自己共役作用素は、自己共役作用素と比べると、扱いが難しい。しかし、最近、複素ポテンシャルをもつシュレーディンガー作用素の研究など、非自己共役作用素の研究が活発になってきている。特に、擬スペクトルという概念が重要になってくる。これらの概念とレゾナンスの評価をもっと精密に行なうことで、新しいレゾナンスの非存在領域を見つけることが出来ると思われる。さらに、連携研究者の岩塚との最近の議論により、磁場の影響は2次元と3次元では異なることがわかったので、次元の違いが結果にどのように反映するかを解析することは興味深いと思われる。

(4) 関連する研究

以下、連携研究者による関連する研究を述べる：峯と野村は、磁束とサポートがランダムなデルタ型磁場をもつシュレーディンガー作用素を考え、スペクトルやIDSの挙動を調べた。田村は、サポートが十分大きく離れている3つのデルタ型ポテンシャルをもつシュレーディンガー作用素のレゾナンスの分布について調べた。山田は、他の研究者とともに、ディラック作用素のレゾナンスのあり様評価を得た。安藤は、他の研究者とと

もに、格子上の離散シュレーディンガー作用素の埋め込まれた固有値や極限吸収原理、散乱行列などを解析した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Hiroshi T. Ito, Resonances of the square root of the Pauli operator, Publ. Res. Inst. Math. Sci. 53(2017), 517-549.

(査読あり)

Hideo Tamura, Aharonov-Bohm effect in resonances for scattering by three solenoids at large separation, Appl. Math. Res. Express. AMRX 2017, no.1, 65-117.

(査読あり)

Takuya Mine, Yuji Nomura, Schrödinger operators with random magnetic fields, Ann. Henri Poincaré 18(2017), 1349-1369.

(査読あり)

Ando Kazunori, Hiroshi Isozaki, Hisashi Morioka, Spectral properties of Schrödinger operators on perturbed lattices, Ann. Henri Poincaré 17(2016), 2103-2171.

(査読あり)

伊藤宏, 山田修宣, ディラック作用素のスペクトルについて, 数学 68 巻第 4 号 (2016), 381-402.

(査読あり)

[学会発表](計 17 件)

伊藤宏, 伸張解析的なポテンシャルをもつハミルトニアンについて, 臨時作用素論セミナー, 2018 年

Hideo Tamura, Efimov-effect in two dimensions: asymptotic distribution of negative eigenvalues, RIMS workshop, Spectral and scattering theory and related topics, 2017

伊藤宏, Dirac 作用素の resonance-free region について, 第 24 回超局所解析と古典解析, 2017

野村祐司, 離散シュレーディンガー作用素の埋蔵固有値と閾値レゾナンスの Persistent 多様体について, 第 24 回超局所解析と古典解析, 2017

山田修宣, Dirac 作用素のリゾルベントの様評価について, 第 24 回超局所解析と古典解析, 2017

伊藤宏, Resonances of Relativistic Hamiltonians with unbounded potentials, 応用解析研究会, 2017

伊藤宏, 発散するポテンシャルをもつ

パウリ作用素の平方根について, 日本数学会秋季分科会函数解析分科会一般講演, 2017

伊藤宏, 発散するポテンシャルをもつ Dirac 作用素のレゾナンス, 日本数学会秋季分科会函数解析分科会一般講演, 2017

Mine Takuya, Scattering theory for Aharonov-Bohm effect, Tosio Kato Centennial Conference, 2017

伊藤宏, 相対論的ハミルトニアンのレゾナンス, 2017 夏の作用素論シンポジウム, 2017

安藤和典, 弾性方程式に対するノイマン-ポアンカレ作用素のスペクトルについて, 2017 夏の作用素論シンポジウム, 2017

田村英男, 2 次元空間でのエフィモフ量子効果について, 2017 夏の作用素論シンポジウム, 2017

伊藤宏, 相対論的シュレーディンガー作用素のレゾナンスについて, 第 23 回超局所解析と古典解析, 2016

伊藤宏, 磁場の入ったハミルトニアンについて, 第 22 回超局所解析と古典解析, 2015

山田修宣, A remark on uniform resolvent estimates of Dirac operators, 第 22 回超局所解析と古典解析, 2015

峯拓矢, 一般超幾何関数を用いた跡公式の計算, 2015 年松本作用素論セミナー

野村祐司, 小栗栖修, 樋口雄介, 離散シュレーディンガー作用素の埋め込まれた固有値について, 2015 年夏の作用素論シンポジウム

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊藤宏 (ITO Hiroshi)
愛媛大学・理工学研究科・教授
研究者番号: 90243005

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

山田修宣 (YAMADA Osanobu)
立命館大学・理工学部・教授
研究者番号: 70066744

田村英男 (TAMURA Hideo)
岡山大学・理学部・教授
研究者番号: 30022734

岩塚明 (IWATSUKA Akira)
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・教授
研究者番号: 40184890

野村祐司 (NOMURA Yuji)

兵庫県立大学・物質理学研究科・教授
研究者番号：40282818

峯 拓矢 (MINE Takuya)
京都工芸繊維大学・工学科学研究科・教授
研究者番号：90378597

安藤 和典 (ANDO Kazunori)
愛媛大学・理工学研究科・准教授
研究者番号：70774884

(4)研究協力者
なし