2版

様　式　C－１９、F－１９－１、Z－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　 元 年　 ６ 月　 ５ 日現在

機関番号：１１３０１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2018

課題番号：１５K０４９６４

研究課題名（和文）高次元波動方程式の基本解に含まれる微分損失が非線形問題に与える影響の解析

研究課題名（英文）The analysis of effects by derivative loss in the fundamental solution of the high-dimensional wave equation on nonlinear problems

研究代表者

高村　博之（Takamura, Hiroyuki）

東北大学・理学研究科・教授

研究者番号：４０２４１７８１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：空間次元が４以上の高次元時空では、波動方程式の基本解にいわゆる「微分損失」が含まれる。そのことが、高次元における解の各点評価による非線形問題の解析を困難にしている大きな原因の一つになっている。本研究では、小さい初期値とベキ型非線形項をもつ方程式と同値な積分方程式において、非線形項に含まれる微分損失は解の最大存在時間に影響を与えず、それを取り除くと、微分方程式に非線形項の時間微分の非局所項が出現することを明らかにした。また、線形項に含まれる微分損失は解の時間減衰の主要部であり、それを取り除くと解の時間減衰が速くなり、解の時間大域存在と有限時間爆発を分ける臨界指数が下がることも明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義
空間次元が３までの時空間における様々な現象は、実体験として容易に想像し得るものであるが、数学や物理ではそれ以上の高次元空間を考えて事象を解析することが自然になりつつある。特に、自然現象を記述する偏微分方程式を数学で統一的かつ厳密に扱う場合、空間次元を一般化しておくことは重要な課題の一つとなっている。本研究はその中で、ほとんど解明されてこなかった高次元波動方程式の解の性質を、あえて困難な各点評価を用いることによって明らかにした。この成果は今後、より実際の現象に近い摩擦現象を考慮した消散項付き波動方程式に応用されたり、その分野の研究の位置付けの中で重要な存在になると思われる。

研究成果の概要（英文）：In the high dimensional space-time, which means larger dimension than 3 in space, the fundamental solution of the wave equation has the so-called "derivative loss". It is one of the reason of preventing us to analyze the nonlinear problem by means of point-wise estimates of the solution. In this research, we clarify that the derivative loss in the nonlinear term of the integral equation which is equivalent to the differential equation with the small data and the power-type nonlinearity does not make any influence to the maximal existence time of the solution. In addition, we have an extra non-local term of time-derivative of the nonlinear term in the differential equation if such a derivative loss is neglected. Moreover, we also clarify that the derivative loss in the linear term contributes the main time-decay, and makes the critical exponent dividing global-in-time existence and finite-time blow-up go the solution smaller if it is neglected.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：波動方程式　非線形　初期値問題　微分損失　時間減衰　時間大域存在　有限時間爆発　高次元

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９、ＣＫ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

本研究の前身である「高次元非線形波動方程式の臨界状態の解析とその応用」基盤研究(C)（一般）2012-2014（課題番号：２４５４０１８３、代表：高村博之）が先駆けとなり、空間次元が４以上の高次元空間における線形波動方程式の基本解に現れる、いわゆる「微分損失」の解析が望まれていた。微分損失とは、例えば初期位置ゼロの解を記述する際、初期速度の積分が出てくるのであるが、高次元では次元の高さに応じて初期速度の高次関数も必要となる事実を指す。

これが着目されるようになったのは、上記の前身課題で、２０年近く不明だった小さい初期値をもつ単独非線形波動方程式に対する一般論の最適性最終問題である、空間４次元で未知関数について２次の非線形項をもった方程式の初期値問題に対する解の最大時間評価の導出に成功したことにある。方程式の形が極めて単純であったにも関わらず、長い間未解決問題となっていた原因は、解析におけるこの微分損失の扱い難さにあった。この解決には、長年蓄積されてきた各点評価における解析技法と新しく開発した関数解析的な技法の組み合わせが寄与している。

高次元波動方程式の基本解に現れる微分損失は、それがない空間次元が３以下の低次元で非常に有効な解の各点評価導出を邪魔するものである。この困難は、偏微分方程式の解析では積分量評価を主体とするソボレフ空間を導入するによってある程度解決するが、それには微分損失の本質が全く見えなくなるという弊害があった。

２．研究の目的

本研究では、各点評価の観点から微分損失が解の存在時間に与える役割を解明すると共に、前身課題の成果を微分損失の立場から位置付けることを目的とした。偏微分方程式論において、解がどのくらい長い時間存在するか、それは初期値の大きさにどれだけ依存するか、という疑問は基本的で重要である。

３．研究の方法

本研究では、微分損失を人工的に取り除いた状態で非線形初期値問題を、特に小さい初期値に対する解の最大存在時間評価を解析する。これは偏微分方程式論では良く見られるように、初期値問題の解がみたすべき積分方程式が出発点となる。しかし、その中から微分損失を取り除いて、その影響が初期値問題の方程式自体にどのような影響を与えるか見ることが、これまでなかった新しい視点である。

４．研究成果

(1) まず、下記の発表論文[9]で非線形の、特に未知関数自身のベキが非線形項になっている半線形の、方程式に対する初期値問題の解の最大存在時間を上から精密に評価するため、常微分不等式に対する解の古典的な非存在定理を精密化した。これは、解の積分量に対する微分不等式に適用されるのであるが、改良前は解の非存在しか証明することができないという欠点があった。そこをカバーするには時間変数と積分量自体をリスケールする方法が有効とされていたが、その議論に穴があることを発見した。これは[9]の結果により容易に修正されるので、欧文研究雑誌には投稿せず講究録[11]に記載した。それと同時に、未知関数のベキのみからなる半線形モデル方程式について、未解明で予想すらなかった空間２次元で２次より低い非線形項に対する解の最大存在時間評価を、初期値速度の積分量がゼロか非ゼロかによって分類しなければいけないことを初めて示し、その形の予想と共に上からの評価を導出した。その結果が最適であること、つまり、解の最大存在時間の下からの評価が上からの評価と初期値のサイズに関して同等になること、は発表論文[8]で明らかにした。これらの結果を含めた一般論の概観を講究録[10]に記し、後に最新の成果も入れて論説[3]にまとめた。

(2) 高次元波動方程式の基本解に含まれる微分損失は、球対称解を想定する限りでは消えてなくなり、それが代わりに解の不定符号性となって現れる。その状況下でどこまで各点評価が解析に有効であるか、下記発表論文[7]で明らかにした。これは解の下からの評価を得るための条件、つまり、解の非存在を示す初期値に対する条件、としては最適と思われるものまで拡張することができた。

(3) 発表論文[6]では、上記「研究方法」で述べた基本解に含まれる微分損失を取り除いた非線形積分方程式を解析した。そのような人工的な操作の影響は、方程式では非局所作用である積分項となって現れることがわかった。しかもその係数が重要で、少しの摂動も許されない形になっている。結論として、非線形項における微分損失は解の最大存在時間に影響を与えないが、線形項における微分損失は解の時間減衰が一番悪い部分を引き連れており、解の最大存在時間を決定する働きをしていることがわかった。現に、空間４次元で２次の半線形項の場合、古典解は時間概大域存在し、長時間経過後に解は爆発するが、この事実は非線形項の微分損失を取り除いても変わらない。しかし、さらに線形項の微分損失を取り除くと解空間の時間減衰がはやくなり、それによって解の時間大域存在と有限時間爆発を分ける非線形ベキの臨界指数が下がって古典解が時間無限大まで存在することになる。ここに今まで起き得なかった高次元特有の結果が得られたのであるが、微分損失を取り去った時に出てくる非局所項が非線形項の時間微分の積分

になっているため、今後はこの特殊な構造が他に出てこないか、積分がなければ消散項にも似ているため、非線形消散型波動方程式との関連を調べる必要が出てきた。そのため、本研究の終了前年度に後身研究として「非線形消散波動方程式の解がもつ波動的性質の解明」基盤研究(B)（一般）2018-2022（課題番号：１８Ｈ０１１３２、代表：高村博之）を申請した。
(4) 上記の消散型波動方程式に対する最初の解析として、発表論文[1,2,4,5]では時間減衰をもつ消散項付き半線形波動方程式の解の爆発、特にエネルギー解の最大存在時間の上からの精密な評価を導出した。時間減衰が弱いと消散項の効果が強く、解は対応する半線形熱方程式のそれに近くなる。現に、時間大域存在と有限時間爆発を分けるベキ型非線形項の臨界指数として、半線形熱方程式に対するそれである藤田指数が出現することは以前から知られていた。本研究ではそれより強い減衰がある場合で、藤田指数より大きい半線形波動方程式に対する臨界指数である Strauss 指数や Glassey 指数が出現することが望まれていた。
　発表論文[5]ではスケール不変とよばれる、その中間的な現象を起こす臨界時間減衰をもった消散項に対して、藤田指数より大きい Strauss 指数に関連した指数までエネルギー解が有限時間爆発を起こすことを初めて明らかにした。これがきっかけとなって、非線形消散波動方程式の分野が活性化し、現在でも他の多くの研究にこの成果が引用されている。発表論文[1,2,4]では散乱消散項とよばれる強い時間減衰をもった消散項付き方程式の解の爆発と最大存在時間の上からの評価を導出した。結果は、消散項がない場合と同じ形になるという予想に沿ったもので、ほぼ満足できるものになった。[4]は非線形項が未知関数のみのベキで劣臨界、[1]は未知関数の導関数のみのベキで劣臨界と臨界、[2]はそれらのベキの和の形で combined effect なる状況が消散項があっても起きることをそれぞれ示した。[1,2]は上記した研究期間が重複している後身の基盤研究(B)の成果の一部でもある。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計１１件）

1. N.-A.Lai & H.Takamura, Nonexistence of global solutions of nonlinear wave equations with weak time-dependent damping related to Glassey's conjecture, Differential and Integral Equations, 32(1-2) (2019), 37-48. 査読有.
https://projecteuclid.org/euclid.die/1544497285

2. N.-A.Lai & H.Takamura, Nonexistence of global solutions of wave equations with weak time-dependent damping and combined nonlinearity, Nonlinear Analysis, RWA, 45 (2019), 83-96.査読有. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2018.06.008

3. 高村 博之, 「単独非線形波動方程式の一般論とその最適性を支えるモデル方程式」, 日本数学会編『数学』, 70(4) (2019), 375-378. 査読有.

4. N.-A.Lai & H.Takamura, Blow-up for semilinear damped wave equations with subcritical exponent in the scattering case, Nonlinear Analysis, TMA, 168 (2018), 222-237. 査読有.
https://doi.org/10.1016/j.na.2017.12.008

5. N.-A.Lai & H.Takamura & K.Wakasa, Blow-up for semilinear wave equations with the scale invariant damping and super-Fujita exponent, Journal of Differential Equations, 263 (2017), 5377-5394. 査読有. https://doi.org/10.1016/j.jde.2017.06.017

6. H.Takamura & K.Wakasa, Global existence for semilinear wave equations with the critical blow-up term in high dimensions, Journal of Differential Equations, 261 (2016), 1046-1067. 査読有. https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.03.036

7. M.A.Rammaha & H.Takamura & H.Uesaka & K.Wakasa, Blow-up of positive solutions to wave equations in high space dimensions, Differential and Integral Equations, 29(1-2) (2016), 1-18. 査読有. https://projecteuclid.org/euclid.die/1448323250

8. T.Imai & M.Kato & H.Takamura & K.Wakasa, The sharp lower bound of the lifespan of solutions to semilinear wave equations with low powers in two space dimensions, K.Kato

& T.Ogawa & T.Ozawa ed. the proceeding of the international conference "Asymptotic Analysis for Nonlinear Dispersive and Wave Equations", Advanced Study of Pure Mathematics, 印刷中. 査読有.

9. H.Takamura, Improved Kato's lemma on ordinary differential inequality and its applications to semilinear wave equations, Nonlinear Analysis, TMA, 125 (2015), 227-240. 査読有. https://doi.org/10.1016/j.na.2015.05.024

10. 高村 博之, 単独非線形波動方程式の初期値問題に対する一般論の終結に関する話題, 京都大学数理解析研究所講究録, 1969 (2015), 40-63. 査読無. http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1969-04.pdf

11. 高村 博之, 常微分不等式に対する加藤の補題の改良と半線形波動方程式への応用, 京都大学数理解析研究所講究録, 1959 (2015), 153-163. 査読無. http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1959-10.pdf

〔学会発表〕(計４１件)

1. H.Takamura, Lifespan estimates of solutions of semilinear wave equations with the scale invariant damping in one space dimension, 第36回九州における偏微分方程式研究集会, 2019.

2. H.Takamura, Lifespan estimates of solutions of semilinear wave equationswith the scale invariant damping in one space dimension, 東北復旦交流事業, 2019.

3. 高村 博之, スケール不変な消散項付き１次元半線形波動方程式の解の最大存在時間評価, 大阪大学微分方程式セミナー, 2018.

4. 高村 博之, 非線形消散波動方程式の最近の発展, 第１回はこだて数理解析研究集会, 2018.

5. H.Takamura, Lifespan estimates of solutions of semilinear wave equations with the scale invariant damping in one space dimension, Seminario di Matematica, Bari University, 2018.

6. 高村 博之, 強い時間減衰を伴う消散項付き非線形波動方程式に対する解の波動的な爆発と lifespan, 三重における非線形波動方程式研究集会, 2018.

7. 高村 博之・頼 宇安, 強い時間減衰を伴う消散項付き非線形波動方程式に対する解の波動的な爆発と lifespan 評価, 2018 日本数学会秋季総合分科会函数方程式論分科会, 2018.

8. 高村 博之, スケール不変な消散項をもつ１次元半線形波動方程式の解のライフスパン, 八戸における偏微分方程式論集中ワークショップ　第九回北海道-東北コンソーシアムセミナー, 2018.

9. H.Takamura, Multipliers on the wave-like blow-up for nonlinear damped wave equations, The 11th Mathematical Society of Japan Seasonal Institute, The Role of Metrics in the Theory of Partial Differential Equations, 2018.

10. 高村 博之, Wave-like blow-up for semilinear damped wave equations, 名古屋微分方程式セミナー, 2018.

11. H.Takamura, The “wave-like” blow-up for nonlinear wave equations with the scattering damping, Eighth Euro-Japanese Workshop on Blow-up, 2018.

12．高村 博之，非線形消散波動方程式の波動的な解の爆発，応用解析研究会，2018.
13． 高村 博之， 非線形消散波動方程式の波動的な解の爆発， 東北大学大学院理学研究科談話会，2018.
14．高村 博之，非線形波動方程式の解析から非線形消散波動方程式の解析へ，東北大学応用数学セミナー，2018.
15． H.Takamura, Multipliers on the wave-like blow-up for nonlinear damped wave equations, Workshop Critical exponent and nonlinear evolution equations, 2018.
16．高村博之，非線型消散波動方程式の解の波動的な爆発導出する multiplier，函館における偏微分方程式論集中ワークショップ 第七回 北海道-東北コンソーシアムセミナー，2017.
17． H.Takamura, Recent progress in analysis on semilinear damped wave equations, Workshop "Analysis and the general relativity", 2017.
18．高村博之，劣 Strauss 指数をもつ半線形消散波動方程式の解の爆発と lifespan 評価，日本数学会 2017 年度秋季総合分科会函数方程式論分科会，2017.
19．H.Takamura, Blow-up for semilinear damped wave equations with super-Fujita exponent, The 11th ISAAC congress, joint session of special sessions "Nonlinear PDE" and "Special interest group: IGPDE Recent progress in evolution equations", 2017.
20．高村 博之，劣シュトラウス指数をもった半線形消散波動方程式の解の爆発，2017 年度第 9 回明治非線型数理セミナー，2017.
21．H.Takamura, Recent development of analysis on nonlinear damped waves, 麗水学院工学院談話会，2017.
22．H.Takamura, Characteristic properties of nonlinear waves in two space dimensions, 麗水学院工学院談話会，2017.
23． H.Takamura, Blow-up for semilinear wave equations with non-effective damping, Workshop on Nonlinear Wave Equations, 2017.
24．今井啄人・加藤正和・高村博之・若狭恭平，The sharp lower bound of the lifespan of solutions to semilinear wave equations with low power in two space dimensions，日本数学会 2017 年度年会函数方程式論分科会，2017.
25． H.Takamura, Blow-up for semilinear wave equations with non-effective damping Zhejiang-Tohoku (浙江-東北) International workshop ”Nonlinear Partial Differential Equations 2017”, 2017.
26．高村 博之，半線形消散波動方程式の解の爆発と Strauss 指数の関係，現象解析特別セミナー第１１回，2017.
27．高村 博之，非影響的な消散波動方程式の劣シュトラウス指数における解の爆発，福島における非線形偏微分方程式論集中ワークショップ 第六回北海道-東北コンソーシアムセミナー，2017.
28．高村 博之，スケール不変な半線形消散波動方程式の優藤田指数における解の爆発，第３２回 松山キャンプ，2017.
29．高村 博之，スケール不変な半線形消散波動方程式の優藤田指数における解の爆発，九州関数方程式セミナー，2016.
30．高村 博之，スケール不変な半線形消散波動方程式の優藤田指数における解の爆発，大阪市

大・大阪府大合同 「南大阪応用数学セミナー」, 2016.
31. 高村 博之・若狭 恭平, Blow-up for semilinear wave equations with scale invariant damping and super Fujita exponent, 日本数学会2016年度秋季総合分科会函数方程式論分科会, 2016.
32. 高村 博之, スケール不変な半線形消散波動方程式の藤田指数を超えた解の爆発, 室蘭における偏微分方程式論 集中ワークショップ 第五回 北海道-東北 偏微分方程式コンソーシアム セミナー, 2016.
33. 高村 博之, Blow-up for semilinear wave equations with scale invariant damping and super Fujita exponent, 偏微分方程式セミナー, 2016.
34. 高村 博之, スケール不変な半線形消散波動方程式の藤田指数を超えた解の爆発, 新発田偏微分方程式研究会, 2016.
35. 高村 博之, 加藤の補題の改良と空間 2 次元半線形波動方程式の解のライフスパンに 関する新しい予想, 2016日本数学会年会函数方程式論分科会, 2016.
36. 高村 博之, Improved Kato's lemma and 2D semilinear wave equations, The 23rd Machikaneyama Seminar on PDEs, 2016.
37. 高村 博之, 常微分不等式に対する加藤の補題と半線形波動方程式への応用, 新潟における偏微分方程式論 集中ワークショップ 第四回 北海道-東北 偏微分方程式コンソーシアム セミナー, 2015.
38. 高村 博之, 常微分不等式に対する加藤の補題の拡張と応用, 武蔵野偏微分方程式研究集会, 2015.
39. 高村 博之, Kato's lemma and its application to semilinear wave equations, 研究集会「第 11 回 非線型の諸問題」, 2015.
40. H.Takamura, Improved Kato's lemma on ordinary differential inequality and its application to semi-linear wave equations, ISAAC 2015, session 13, Special interest group: IGPDE, Nonlinear partial differential equations, 2015.
41. 高村 博之, 積分方程式からみる非線形波動方程式の初期値問題, 小樽における偏微分方程式論 集中ワークショップ 第三回 北海道-東北 偏微分方程式コンソーシアム セミナー, 2015.

6. 研究組織