

令和 2 年 4 月 28 日現在

機関番号：32621

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04966

研究課題名（和文）複素領域での非線型偏微分方程式の解とその特異点の研究

研究課題名（英文）Study of solutions and their singularities of nonlinear partial differential equations in the complex domain

研究代表者

田原 秀敏 (TAHARA, Hidetoshi)

上智大学・理工学部・教授

研究者番号：60101028

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 3,600,000円

研究成果の概要（和文）：複素領域での非線型偏微分方程式についての研究を行い、解の特異点の様子を詳しく調べた。「一階の方程式で Briot-Bouquet type と呼ばれているもの」と「一階の方程式で、nonlinear totally characteristic type と呼ばれているもの」については、特異点の構造は完全に解明された。また、高階の非線型偏微分方程式や q -差分偏微分方程式に関しても多くの新しい知見が得られた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

複素領域での常微分方程式の特異点の研究は、20世紀初頭に一応の完成を見た。その後は、数学や物理などの多くの分野で基本言語の一つとして活用されている。偏微分方程式の特異点の研究においても、基礎的部分が十分に整理されれば、多くの数学や物理などの分野において重要な役割を果たすと期待される。

研究成果の概要（英文）：I studied nonlinear partial differential equations in the complex domain, and investigated in detail the behavior of singularities of solutions. The structure of singularities is completely clarified in the following two cases: the case of first order Briot-Bouquet type partial differential equations, and the case of first order nonlinear totally characteristic partial differential equations. In the case of higher order partial differential equations and q -difference partial differential equations, many new findings have been obtained.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：偏微分方程式 複素領域 特異点 形式解

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。

1. 研究開始当初の背景

複素領域での常微分方程式の特異点の基礎理論の研究は、20世紀初頭に一応の完成を見た。その後は、数学や物理などの多くの分野で基本言語の一つとして活用されている。偏微分方程式の特異点の研究においても、基礎的部分が十分に整理されれば、多くの数学や物理などの分野において重要な役割を果たすであろうと期待される。実領域での偏微分方程式の解の特異点の研究は盛んに行われているが、複素領域での特異点の研究は主として幾何学的な見地から行われてきた。基礎解析学の立場からの偏微分方程式の特異点の研究は、その重要性にも関わらず、十分には行われていなかったというのが研究開始当初の状況であった。

2. 研究の目的

複素領域での非線型偏微分方程式と超曲面 S を考える。これに対して、次の3つの問題を解決することを目標とした。

- 超曲面 S 上に特異点をもつ解は存在するのか？
- 存在するとき、どれくらい多く存在するのか？
- そのような解の特異点は S 上でどのような振る舞いをするのか？

3. 研究の方法

具体的な例で実験的な計算を多く行い、それをもとにして一般論の構築を試みた。手法は、古典的な漸近解析だけでなく、ボレル総和法と呼ばれる形式解を利用する手法も駆使した。ボレル総和法は、解の存在証明には極めて有効な手法である。解の存在が分かれば、古典解析で特異点の振る舞いの様子はかなり調べることは可能である。こうしたことの繰り返しで研究を遂行した。

4. 研究成果

(1) フックス型非線型偏微分方程式には、特異点をもつ関数を成分にするような形式解が存在する。方程式が非コワレウスキー型のときは、この形式解は一般的には収束しない。この形式解の多重ボレル総和可能性は、線型偏微分方程式の時は、Yamazawa (Funkcial. Ekvac. 2017) によって示されていたが、非線型偏微分方程式の時は未解決のままであった。本研究により「もしも方程式がこの様な形式解をもてば、この形式解を古典的な意味で漸近展開とする真の解が存在する」ことを証明した。しかし、漸近展開を途中で切ったときの剰余項の評価は未だ示されていないなど、更に調べるべき課題は多く残った。

(2) D. Bacani (テンプル大), J. E. C. Lope (フィリピン大) と共同で、高階のフックス型非線型偏微分方程式で、時間変数について連続にのみ依存している場合の研究を行い、適当な条件のもとで、解の一意可解性が成り立つことを示した。正規形の非線型偏微分方程式に対して対数的特異点をもつ解の構成しようとする、適当に変換したのちの方程式は時間変数に関しては連続の仮定しか満たさない。従って、上の一意可解性の結果は、この対数的特異点の構成問題に応用できると期待される。

(3) Briot-Bouquet 型の一階非線型偏微分方程式の特異点をもつ解の構造は、時間変数 t の正冪程度の特異点をもつものについては、Gerard-Tahara (Publ. Res. Inst. Math. Sci. 1990) と Yamazawa (J. Math. Soc. Japan, 2003) で解決されていた。そして、いくつかの例では、それ以外に、対数的な特異点が現れることも知られていた。この対数的特異点についての組織的

な研究を行った。「解の対数的特異点は、方程式の特性指数関数が恒等的に零になる場合以外には現れない」ことが証明された。「方程式の特性指数関数が恒等的に零になる場合、本当に対数的特異点をもつ解が存在するのか？」という問題についても研究を行った。その結果、いくつかの基本的な条件のもとで、そのような解が実際に構成出来ることが分かった。これで、「すべての特異点をもつ解を決定する」という本研究の目的は、Briot-Bouquet 型の一階非線型偏微分方程式の場合には、完全に達成された。

(4) 一階の totally characteristic な非線型偏微分方程式で、空間変数について確定特異点をもつような方程式について、特異解の構成を行った。線型部分のある係数が負の場合には、既に知られた解の一意性の結果 (Tahara, Tokyo J. Math. 2008) と合わせることで、構成した解ですべての特異解が尽くされることが示された。結果として、線型部分のある係数が負の場合には、すべての特異解の決定に成功したことになる。議論は古典的な漸近解析を駆使して論じた。

(5) 特異点をもつ一階の非線型偏微分方程式の解の一意性についての研究を行なった。次の3つの場合について、ものすごく弱い仮定の下で解の一意性を示すことに成功した。3つの場合というのは、Briot-Bouquet 型の非線型偏微分方程式の場合、nonlinear totally characteristic と呼ばれる偏微分方程式で $x=0$ に確定特異点を持つ場合、および、 $x=0$ に不確定特異点をもつ場合、の3つである。この一意性の結果は、(3)、(4) の成果の一部を証明するのに使われた。

(6) 線型偏微分方程式の発散級数解のポレル総和法の研究は、Miyake, Balser, Ouchi, Ichinobe 達により、精力的な研究がなされてきた。この内、非コワレスキー型とよばれる線型偏微分方程式の場合について、多くの興味深い例を計算した。結果として、方程式の係数が空間変数に依存している場合に、従来の常識を覆すような極めて特異な反例が発見された。

(7) A. Lastra (アルカラ大) と共同で、高階の totally characteristic な非線型偏微分方程式で、空間変数について不確定特異点をもつ方程式について、発散級数解の Maillet 型定理の研究を行った。本研究で、時間変数と空間変数の両方についての良い Gevrey 指数の公式を導いた。途中でキャンセレーションが起きない場合には、得られた Gevrey 指数がベストなものであることも証明された。この結果は、発散級数解を漸近展開とする真の解の構成問題を解く上で重要な役割を果たすと思われる。

(8) (7) の研究に関連して、多くの新しい問題が出てきた。方程式の主要部は同じだが残りの部分が非コワレスキー的な場合には (6) と同様の議論をしても、得られた条件が必要十分になっていない多くの例が現れた。状況を見極めるために、Lastra, 山澤浩司 (芝浦工大) と共同で、多くの例を計算してみた。いくつかのモデル方程式については、Gevrey 指数に関する必要十分条件は導けた。しかし、それが一般の方程式にどのような条件として記述できるのか? については未だ不明である。今後、更なる研究が必要であろう。

(9) q が1より大きいときに、 q -差分偏微分方程式の研究も行った。時間変数について q -差分、空間変数について偏微分をもつ q -差分偏微分方程式の発散形式解のポレル総和法の研究

を行った。この様な q -差分偏微分方程式は、適当な条件のもとでは、Gevrey 指数が 1 の発散級数解をもつ。これに対して、それを漸近展開にもつ真の解を、田原 (Ann. Inst. Fourier, 2017) による新しい q -ラプラス・ポレル変換を使って構成した。残る課題は、多重総和法が必要な場合の研究である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計11件（うち査読付論文 10件 / うち国際共著 5件 / うちオープンアクセス 11件）

1. 著者名 H. Tahara	4. 巻 -
2. 論文標題 Uniqueness of the solution of nonlinear singular first order partial differential equations	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 A. Lastra and H. Tahara	4. 巻 -
2. 論文標題 Maillet type theorem for nonlinear totally characteristic partial differential equations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-019-01864-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する
1. 著者名 H. Tahara and H. Yamazawa	4. 巻 B75
2. 論文標題 A note on G_q -summability of formal solutions of some linear q -difference-differential equations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 113-121
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 Y. Okada, R. Schaefer and H. Tahara	4. 巻 2101
2. 論文標題 A formal solvability of a coupling equation for PDEs of Briot-Bouquet type	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 数理解析研究所講究録	6. 最初と最後の頁 91-97
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 D. B. Bacani, J. E. C. Lope and H. Tahara	4. 巻 41
2. 論文標題 On the unique solvability of nonlinear Fuchsian partial differential equations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 225-239
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi:10.3836/tjm/1502179268	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 H. Tahara	4. 巻 67
2. 論文標題 q-Analogues of Laplace and Borel transforms by means of q-exponentials	5. 発行年 2017年
3. 雑誌名 Annales de l'institut Fourier	6. 最初と最後の頁 1865-1903
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5802/aif.3124	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Y. Okada, R. Schaefer and H. Tahara	4. 巻 B57
2. 論文標題 Unique solvability of coupling equations in holomorphic functions	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku Bessatsu	6. 最初と最後の頁 69-78
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 H. Tahara	4. 巻 39
2. 論文標題 Generalized Poincare condition and convergence of formal solutions of some nonlinear totally characteristic equations	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 863-883
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) doi:10.3836/tjm/1475723091	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 M. A. C. Tolentino, D. B. Bacani and H. Tahara	4. 巻 260
2. 論文標題 On the lifespan of solutions to nonlinear Cauchy problems with small analytic data	5. 発行年 2016年
3. 雑誌名 Journal of Differential Equations	6. 最初と最後の頁 897-922
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jde.2015.09.013	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 H. Tahara and H. Yamazawa	4. 巻 35
2. 論文標題 q-Analogue of summability of formal solutions of some linear q-difference-differential equations	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Opuscula Mathematica	6. 最初と最後の頁 713-738
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7494/OpMath.2015.35.5.713	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 H. Tahara	4. 巻 35
2. 論文標題 Analytic continuation of solutions of some nonlinear convolution partial differential equations	5. 発行年 2015年
3. 雑誌名 Opuscula Mathematica	6. 最初と最後の頁 739-773
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.7494/OpMath.2015.35.5.739	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計16件(うち招待講演 9件/うち国際学会 8件)

1. 発表者名 田原秀敏
2. 発表標題 特異点をもつ一階非線型偏微分方程式の解の一意性について
3. 学会等名 2020年度日本数学会年会
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 H. Tahara
2. 発表標題 Uniqueness of the solution of nonlinear singular first order partial differential equations
3. 学会等名 Workshop FASFE19 : Formal and analytic solutions of functional equations (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 H. Tahara
2. 発表標題 Maillet type theorem for nonlinear totally characteristic partial differential equations
3. 学会等名 Conference CDDE2018 「Complex differential and difference equations」 (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田原秀敏
2. 発表標題 Maillet type theorem for nonlinear totally characteristic partial differential equations
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「Various problems in algebraic analysis - microlocal analysis and asymptotic analysis - (代数解析学の諸相-超局所解析と漸近解析-)」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 田原秀敏
2. 発表標題 Gevrey type estimates of formal solutions of some totally characteristic partial differential equations
3. 学会等名 RIMS共同研究(グループ型)「Formal and analytic solutions of functional equations on the complex domain (複素領域における形式解と解析解)」(招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 H. Tahara
2. 発表標題 On analytic solutions of some nonlinear singular partial differential equations
3. 学会等名 Workshop FASdiff17: Formal and Analytic Solutions of Diff. Equations (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 田原秀敏
2. 発表標題 Some examples of the Borel summability of formal solutions of linear partial differential equations
3. 学会等名 RIMS共同研究(公開型)「Microlocal analysis and asymptotic analysis(超局所解析と漸近解析)」(招待講演)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 田原秀敏
2. 発表標題 Summability of formal solutions of q-difference partial differential equations
3. 学会等名 RIMS Workshop "Exponential asymptotics of difference and differential equations"(招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 H. Tahara
2. 発表標題 On the summability of formal solutions of some linear q-difference partial differential equations
3. 学会等名 Workshop FASPDE16 "Formal and Analytic Solutions of Partial Differential Equations"(国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 田原秀敏
2. 発表標題 On the summability of formal solutions of some linear q-difference partial differential equations
3. 学会等名 RIMS研究集会 "超局所解析と特異摂動論の新展開" (招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 田原秀敏
2. 発表標題 Generalized Poincare condition and convergence of formal solutions of some nonlinear totally characteristic equations
3. 学会等名 研究集会「Tokyo Journal of Mathematics 笹田記念号刊行に寄せて」(招待講演)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 H. Tahara
2. 発表標題 q-Analogues of Laplace and Borel transforms with application to q-difference equations
3. 学会等名 International Conference on "Partial Differential Equations: General Theory and Variational Problems" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 H. Tahara
2. 発表標題 Lifespan of solutions to nonlinear Cauchy problems with small analytic data
3. 学会等名 EquaDiff 2015 (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 H. Tahara
2. 発表標題 Analytic continuation of solutions to nonlinear convolution partial differential equations and its application
3. 学会等名 Conference "Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations" (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 H. Tahara
2. 発表標題 Maillet type theorems, convolution equations and multisummability of formal solutions
3. 学会等名 Conference "Differential and difference equations: analytic, arithmetic and Galoisian approaches" (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 田原秀敏
2. 発表標題 On singular solutions of nonlinear singular partial differential equations in a sectorial domain
3. 学会等名 RIMS共同研究「複素の偏微分方程式における代数解析的方法」(招待講演)
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

複素領域での非線型偏微分方程式の解とその特異点の研究
<http://pweb.cc.sophia.ac.jp/tahara/kaken.html>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
--	---------------------------	-----------------------	----