2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ５ 月 ２８ 日現在

機関番号：３２６４１

研究種目：基盤研究(C)（一般）

研究期間：2015～2017

課題番号：１５Ｋ０４９６７

研究課題名（和文）Kirchhoff方程式の大域理論

研究課題名（英文）Global theory of the Kirchhoff equation

研究代表者

松山　登喜夫（Matsuyama, Tokio）

中央大学・理工学部・教授

研究者番号：７０２４９７１２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,300,000円

研究成果の概要（和文）：本研究はGevrey空間あるいはSobolev空間ににおけるKirchhoff方程式の時間大域解の存在を証明することである．研究期間内でGevrey空間でのsemiglobal solutionの一意的存在を証明することが出来た．すなわち，時間を任意に与えた時その時間まで存在するGevrey級解を構成することに成功した．初期値のGevery解析性は時間に依存しているため目標とするGevrey可解性まではまだ到達できてはいないが，本研究で得られた結果は現段階では関連するこれまでのすべての結果を超えたものである．

研究成果の概要（英文）：The aim in this study is to prove the existence and uniqueness of Gevrey class solutions to the Kirchhoff equation. During the term of this study, it is proved that Kirchhoff equation admits a unique semiglobal solution. Namely, given a time T, the Kirchhoff admits a unique Gevrey class solution up to T. Since the Gevrey analyticity of data depends on T, our result does not achieve to solving the open problem. However, it should be mentioned that our result surpasses all of the previous known results.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：Kirchhoff方程式　Gevrey空間　大域解

1. 研究開始当初の背景

Kirchhoff 方程式は，主要部の係数が未知関数の積分で与えられている時間変数のみに依存するいわゆる非局所性をもつ準線形双曲型偏微分方程式として知られ，国内外の多くの研究者により多大なる関心を寄せられているにもかかわらずその解析は非常に難しいことが知られている．1876 年に G. Kirchooff は彼の著書で 1 次元の弦の非線形振動を記述する方程式として提唱して以来，1940 年 S. Bernstein により有界区間上で時間大域的な実解析解が得られた．その後一般次元の実解析解は Arosio-Spagnolo により得られた．それ以来，実解析的なクラスを Sobolev 空間に広げるべく国内外の多くの研究者がこの問題に取り組んだにもかかわらず，Sobolev 空間に属する大きな初期値に対する時間大域解の存在が得られていない．それどころか，Gevrey 級解すら得られていないのが現状である．実解析的クラスと無限回微分可能な関数からなる空間の中間的なクラスとして準解析的クラスが考えられるが，準解析的解に関しては幾つか結果がある．しかし上記の問題とはかなり隔たりがある．

2. 研究の目的

Kirchhoff 方程式は 1876 年，G. Kirchhoff により弦の非線形振動を記述する方程式として導出された．1940 年に S. Bernstein が一次元の有界区間における初期値境界値問題に対する実解析的解の存在を証明して以来，Gevrey 級及び Sobolev 空間に大きな初期値をもつ Kirchhoff 方程式の時間大域解の存在は未だに証明されていない．本研究ではこれらの未解決問題の一つである，初期値が Gevrey 級及び Sobolev 空間に属する場合の全空間における Cauchy 問題の時間大域的可解性に関する研究を遂行する．本研究の方法はフーリエ変換と線形双曲型偏微分方程式のエネルギー評価式を道具として議論を展開する．更に外部領域や有界領域における初期値境界値問題にも触れる．外部問題については一般化されたフーリエ変換が適用でき，有界領域ではフーリエ級数の方法が展開でき全空間での結果はそのまま領域でも成立することが予想される．

3. 研究の方法

Kirchhoff 方程式の Cauchy 問題及び初期値境界値問題に対する時間大域的 Gevrey 級解の存在証明と Sobolev 空間における適切性にフーリエ変換を用いて取り組む．これらの研究成果を国内外の研究集会で発表するとともに研究者と情報交換を交わし，助言・批判を受ける．さらに，本研究を推進するに当たり国内外の解析学の専門家を招聘し，研究期間内に所属機関である中央大学で研究集会やセミナーを開催する．目下ピサ大学の Vladimir Georgiev 教授及びローマ大学の Piero D'Ancona 教授と，波動方程式の外部問題の局所エネルギー減衰と分散型評価式に関する共同研究も進行中であり，本研究は上記研究と平行して推進する．

さらに波動方程式の初期値・境界値問題を考察するにあたり，一般領域での Besov 空間の基礎理論も必要となる．この空間の定義をスペクトル解析をとおして与え，種々の評価式にこの空間を用いる．

4. 研究成果

研究期間内に Kirchhoff 方程式の Cauchy 問題に対する時間大域解は得られなかったが,時間を任意に与えれば Gevrey 級解がそこまで存在することに成功した．いわゆる semiglobal solution の一意的存在定理である．この方法は，係数が時間に依存する線形双曲型偏微分方程式のエネルギー不等式とフーリエ変換法に基づいている．本研究の方法は外部問題にも有効である.一般化されたフーリエ変換を使うことが出来るからである．有界領域ではフーリエ級数が使え同様な結果が得られた.これの結果はこれまで知られている結果を超えたものなっており，結果の概要は C. R. Acad. Sci. Paris から出版され，2020 年までには J. Anal. Math. から出版される予定である．なお本研究の大半は M. Ruzhansky 氏 (Imperial College London)との共同研究に基づいている．

もう一つの成果は一般開集合上での Besov 空間の基礎理論が，岩渕 司氏(東北大)と谷口 晃一氏(中央大)との共同研究をとおして得られた.まず一般開集合上で定義された spectral multiplier の Lebesgues 空間における有界性に関する結果が得られた．この結果は一般開集合での Besov 空間の定義を与える際に基本的な役割を果たしている．

Spectral multiplier に関する結果はスペインの雑誌 Rev. Mat. Iberoam. から出版される予定であり，Besov 空間に関する結果はすでに論文としてまとめられ現在投稿中である.結果の概要は下記の出版論文としてまとめられている．

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 3 件)

① T. Iwabuchi, T. Matsuyama, K, Taniguchi, Lp-boundedness of functions of Schrödinger operators on an open set of Rd, New Trends in Analysis and Interdisciplinary

Applications,Birkhauser, 2017, pp. 307-312.

② T. Matsuyama, M. Ruzhansky, The Kirchhoff equation with Gevrey data, New Trends in Analysis and Interdisciplinary Applications, Birkhauser, 2017, pp. 313-318.

③ T. Matsuyama, M. Ruzhansky, Almost global well-posedness of Kirchhoff equation with Gevrey data, C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I, Vol. 322, No. 5 (2017), pp. 522-525.

〔学会発表〕(計 13 件)

① 岩渕 司，松山 登喜夫，谷口 晃一，Dirichlet Laplacian で生成された Besov 空間，東京大学数理科学研究科，2018 年 3 月.

② 岩渕 司，松山 登喜夫，谷口 晃一，Schrödinger 作用素によって生成される Besov 空間，東京大学数理科学研究科，2018 年 3 月.

③ 岩渕 司，松山 登喜夫，谷口 晃一，領域上の Besov 空間における双線形評価式，東京大学数理科学研究科，2018 年 3 月.

④ T. Matsuyama, Local energy decay estimates for wave equation on exterior domains, 11th ISAAC Congress in Växjö, 2017 年 8 月, Linnaeus University, Sweden.

⑤ 松山 登喜夫，Local energy decay estimates for wave equation on exterior domains，東京理科大学 理工学部談話会，2017 年 6 月.

⑥ 松山 登喜夫，Local energy decay estimates for wave equation on exterior domains，名古屋微分方程式セミナー，2017 年 4 月.

⑦ T. Matsuyama, Decay estimates for wave equation with a potential on exterior domains, International Conference on Generalised Functions GF2016, Centre for Advanced Academic Studies Dubrovnik, University of Zagreb, 2016 年 9 月.

⑧ T. Matsuyama, Decay estimates for wave equation with a potential on exterior domains, Mathematical Analysis for Stability in Nonlinear Dynamics in honor of Professor Vladimir Georgiev on his 60th birthday, 北海道大学, 2016 年 8 月.

⑨ 松山 登喜夫，Kirchhoff 方程式の Gevrey 級解，東海大学数学科・情報数理学科談話会，2016 年 1 月.

⑩ 松山 登喜夫，Kirchhoff 方程式の Gevrey 級解，日本数学会秋季総合分科会 函数方程式論分科会，京都産業大学，2015 年 9 月.

⑪ T. Matsuyama, Gevrey class solutions of the Kirchhoff equation, 10th International ISAAC Congress, 2015 年 8 月.

⑫ **<u>松山 登喜夫</u>，Kirchhoff 方程式の Gevrey 級解，南大阪応用数学セミナー，大阪市立大学，2015 年 7 月.**

⑬ **<u>松山 登喜夫</u>，Kirchhoff 方程式の Gevrey 級解，幾何と解析セミナー，東北大学情報科学研究科. 2015 年 6 月.**

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕

○出願状況（計 **0** 件）

○取得状況（計 **0** 件）

〔その他〕
ホームページ等

6．研究組織
(1)研究代表者
松山 登喜夫 （**MATSUYAMA，Tokio**）
中央大学・理工学部・教授
研究者番号：**70249712**