

平成 30 年 6 月 12 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04968

研究課題名(和文)非線形分散波動方程式の孤立波解に関する研究

研究課題名(英文)Study on solitary wave solutions for nonlinear dispersive wave equations

研究代表者

太田 雅人(Ohta, Masahito)

東京理科大学・理学部第一部数学科・教授

研究者番号：00291394

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：3次の非線形項を持つ空間1次元の非線形シュレディンガー方程式系の半自明な定在波解の軌道安定性と不安定性について、退化した場合を含めて調べた。また、微分型非線形シュレディンガー方程式の端点の場合の孤立波解の不安定性について調べた。さらに、調和ポテンシャルを含む非線形シュレディンガー方程式と部分的な束縛ポテンシャルを含む非線形シュレディンガー方程式の定在波解の強い意味での不安定性を証明した。

研究成果の概要(英文)：We studied a system of nonlinear Schroedinger equations with cubic interactions in one space dimension. The orbital stability and instability of semitrivial standing wave solutions were studied for both non-degenerate and degenerate cases. We also studied the instability of solitary wave solutions in endpoint case. Moreover, we proved the strong instability of standing wave solutions for nonlinear Schroedinger equations with a harmonic potential and with a partial confinement.

研究分野：非線形偏微分方程式論

キーワード：非線形シュレディンガー方程式 調和ポテンシャル 定在波 孤立波 安定性

### 1. 研究開始当初の背景

(1) 非線形シュレディンガー方程式など非線形分散波動方程式の孤立波解の安定性に関する Grillakis, Shatah and Strauss (1987, 1990) による一般論では、安定性と不安定性の境目となるような退化した場合は除外されている。このような退化した場合に関しては、Comech and Pelinovsky (2003) や研究代表者の研究 (2011) を契機として、前田昌也、山崎陽平などによる進展があった。しかし、これまでの研究はすべて、孤立波解の族のパラメータが1つの場合を扱っており、2つ以上のパラメータを含む場合に対しては、安定性と不安定性の境目となる臨界的状況での孤立波解の安定性・不安定性は未解明であった。

(2) 微分型非線形シュレディンガー方程式は、 $L^2$  スケール不変性を持ち、爆発解の存在に関しても臨界的であると考えられているが、爆発解の存在は未解決問題として残されている。この問題に関して、Yifei Wu (2013, 2015) による時間大域存在定理を契機として新たな進展があった。

### 2. 研究の目的

非線形シュレディンガー方程式、非線形クライン・ゴルドン方程式、KdV 型方程式など非線形分散波動方程式及び連立方程式系の孤立波解の大域的構造および安定性と不安定性について研究する。主な研究目的は以下の2つである。

(1) 孤立波解の族が2つ以上のパラメータを含む場合に対して、安定性と不安定性が分かれる臨界的状況における孤立波解の性質を解明する。

(2) 調和ポテンシャルを含む非線形シュレディンガー方程式の不安定な孤立波解と爆発解との関係を明らかにする。特に、軌道不安定な孤立波解の任意の近傍に有限時間で爆発する解が存在するための条件を明らかにする。

### 3. 研究の方法

(1) 非線形分散波動方程式を研究している国内外の研究者と意見交換及び研究討論を行う。そのために、東京理科大学で定期的開催している、神楽坂解析セミナーを活用するとともに、その他に、神楽坂非線形波動研究会を開催する。

(2) 研究成果が得られた場合は、積極的に研究集会、セミナーや学会などで発表を行い、関連分野の研究者から批評を受け、次の研究の糧にする。

(3) 研究代表者と研究協力者で日常的に研究討論を行い、それぞれの研究の進捗状況を確認する。

(4) 微分型非線形シュレディンガー方程式に関しては、Yifei Wu 氏と共同研究を行うために相互に訪問し合う。

### 4. 研究成果

(1) 非線形光学においてコヒーレント的と呼ばれる3次の非線形相互作用を持つ空間1次元における非線形シュレディンガー方程式の2成分連立系の定在波解の軌道安定性について川原将太郎氏と共同研究を行った。定在波解として、もっとも単純な形をした単独の非線形シュレディンガー方程式の定在波解の定ベクトル倍で与えられるもの、特に、1つの成分が0であるような半自明な定在波解について考察した。このような形の定在波解は、連立系の解として非常に特別なもののように思われるが、基底状態解はこのような形に限られることを示した。また、方程式に含まれるパラメータに関して、軌道安定性と不安定性をほぼ分類することができた。例外として、対称性が高く、退化の度合いが強い場合については、得られた結果が部分的なものとなったため、今後の課題としたい。従来からよく研究されている非コヒーレント的相互作用をもつ場合は、上で述べた形の定在波解はすべて安定であることに注意すると、コヒーレント的相互作用の特徴を捉えることができたと考えている。また、M. Colin and Ohta (2012) によって得られた対応する2次の相互作用を持つ非線形シュレディンガー方程式の連立系に対する結果と比較することにより、2次の相互作用と3次の相互作用の類似点と相違点が明確になった。

(2) 質量劣臨界と優臨界の2つの引力的冪型非線形項を持つ非線形シュレディンガー方程式やデルタ関数ポテンシャルを含む非線形シュレディンガー方程式に対しては研究代表者と山口崇博氏による研究 (2015, 2016) を発展させる形で、調和ポテンシャルを含む非線形シュレディンガー方程式の定在波解の強い意味での不安定性を証明することに成功した。調和ポテンシャルを含む非線形シュレディンガー方程式はボース・アインシュタイン凝縮のモデルでもあり、解の有限時間爆発と不安定な定在波解の関係を明らかにしたという点で意義が深いと考えている。

(3) 微分型非線形シュレディンガー方程式のパラメータ領域の境界における孤立波解の不安定性について、Cui Ning 氏、Yifei Wu 氏との共同研究を行った。

(4) Bellazzini, Boussaid, Jeanjean and Visciglia [BBJV] (2017) は部分的な束縛ポテンシャルを含む非線形シュレディンガー方程式に関して、非線形項の冪が質量優臨界であっても、ある指数よりも小さければ、安定な定在波解が存在することを示した。その指数は、束縛されている空間の次元が2以上の場合はソボレフの臨界指数と一致するが次元が1の場合はソボレフの臨界指数より真に小さい。そこで、束縛されている次元が1の場合、[BBJV]の冪に対する条件が最良であるか、という観点から研

究を行い、非線形項の冪が [BBJV] の指数以上のとき、すべての基底状態解は強い意味で不安定であることを証明することができた。これにより、安定な定在波解が存在するための [BBJV] の条件が最良であることが明確になった。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

##### [雑誌論文] (計 5 件)

M. Ohta, Strong instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a partial confinement, *Communications on Pure and Applied Analysis* **17** (2018), 1671-1680. 査読有  
DOI: 10.3934/cpaa.2018080

M. Ohta, Strong instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with harmonic potential, *Funkcialaj Ekvacioj* **61** (2018), 135-143. 査読有  
DOI: 10.1619/fesi.61.135

C. Ning, M. Ohta and Y. Wu, Instability of solitary wave solutions for derivative nonlinear Schrödinger equation in endpoint case, *Journal of Differential Equations* **262** (2017), 1671-1689. 査読有  
DOI: 10.1016/j.jde.2016.10.020

M. Ohta and T. Yamaguchi, Strong instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a delta potential, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B56** (2016), 79-92. 査読有  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kenkyubu/bessatsu.html>

M. Ohta and T. Yamaguchi, Strong instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with double power nonlinearity, *SUT Journal of Mathematics* **51** (2015), 49-58. 査読有  
[http://www.rs.tus.ac.jp/sutjmath/\\_userdata/51-1/04-Ohta-Yamaguchi.pdf](http://www.rs.tus.ac.jp/sutjmath/_userdata/51-1/04-Ohta-Yamaguchi.pdf)

##### [学会発表] (計 11 件)

M. Ohta, Strong instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a partial confinement, *Critical exponent and nonlinear evolution equations 2018*, 東京理科大学, 2018 年 2 月.

M. Ohta, Strong instability of standing waves for nonlinear

Schrödinger equations with a partial confinement, *Third Workshop on Nonlinear Dispersive Equations*, IMECC-UNICAMP, Campinas, Brazil, 2017 年 11 月.

太田雅人, Strong instability of standing waves for nonlinear

Schrödinger equations with a partial confinement, 日本数学会秋季総合分科会函数方程式論分科会, 山形大学, 2017 年 9 月.

M. Ohta, Strong instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a partial confinement, *RIMS Workshop Nonlinear Wave and Dispersive Equations*, 京都大学, 2017 年 8 月.

太田雅人, Strong instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with harmonic potential, 第 6 回「ハミルトン系とその周辺」研究集会, 京都大学, 2017 年 3 月.

太田雅人, Strong instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with harmonic potential, 日本数学会秋季総合分科会函数方程式論分科会, 関西大学, 2016 年 9 月.

M. Ohta, Strong instability of standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a harmonic potential, *Mathematical Analysis for Stability in Nonlinear Dynamics-in honor of Professor Vladimir Georgiev on his 60th birthday-*, 北海道大学, 2016 年 8 月.

M. Ohta, Stability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with cubic nonlinearity, *Workshop on Quasilinear and nonlocal nonlinear Schrödinger equations*, Wolfgang Pauli Institute Vienna, Austria, 2015 年 10 月.

太田雅人, Instability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations in a degenerate case, 金沢解析研究会 2015, 金沢大学, 2015 年 8 月.

M. Ohta, Stability of standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations with cubic nonlinearity, *The 10th International ISAAC Congress*, University of Macau, China, 2015 年 8 月.

太田雅人 ,Stability of standing waves  
for a system of nonlinear Schrödinger  
equations in a degenerate case, RIMS  
共同研究「非線型現象のモデルに潜む  
未踏査数理構造の探究 - 基礎数理と応  
用の協働」, 京都大学, 2015 年 7 月 .

〔その他〕

ホームページ等

<http://www.rs.tus.ac.jp/mohta/>

## 6 . 研究組織

### (1)研究代表者

太田 雅人 (OHTA, Masahito)

東京理科大学・理学部・教授

研究者番号 : 00291394

### (2)研究分担者

( )

研究者番号 :

### (3)連携研究者

加藤 圭一 (KATO, Keiichi)

東京理科大学・理学部・教授

研究者番号 : 50224499

### (4)研究協力者

深谷 法良 (FUKAYA, Noriyoshi)

川原 将太郎 (KAWAHARA, Shotaro)