

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 13 日現在

機関番号：34315

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04971

研究課題名(和文)シュレディンガー方程式の準古典解析

研究課題名(英文)Semi-classical analysis of the Schroedinger equations

研究代表者

藤家 雪朗(FUJIE, Setsuro)

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号：00238536

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：当研究期間における主な研究成果は以下の3つである。(1)古典力学系の双曲型不動点において、対応する量子力学系の特異性伝播の定理を得た。双曲型不動点に付随する安定多様体上で準古典波面集合が空集合であれば、不安定多様体上でも準古典波面集合が空集合であるという定理を証明することに成功した。(2)行列値ポテンシャルを持つシュレディンガー作用素のスペクトルシフト関数は、スカラーの散逸関数を持つとき、準古典において完全な漸近展開を持つことを証明した。(3)行列値ポテンシャルを持つシュレディンガー作用素の量子共鳴の準古典漸近分布を、エネルギー交差が起きる一次元 2×2 の典型的なモデルに対して研究を行った。

研究成果の概要(英文)：The main results of the research during this period are the following three. (i) We established a propagation of singularity theorem of the quantum system at a hyperbolic fixed point of the corresponding classical mechanics. We proved that if the semiclassical wave front set is empty on the incoming stable manifold associated to the fixed point, then it is also empty on the outgoing stable manifold. (ii) We prove a theorem that the spectral shift function of the Schroedinger operator with matrix-valued potential has a complete asymptotic expansion if its symbol has a scalar escape function. (iii) We clarified the semiclassical asymptotic distribution of resonances of the Schroedinger operator with matrix-valued potential for a model of one-dimensional 2 by 2 system with an energy level crossing.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：準古典解析 超局所解析 シュレディンガー作用素 量子共鳴 エネルギー交差

1. 研究開始当初の背景

本研究期間は、科学研究費補助金の援助の下に「シュレディンガー方程式の準古典解析」との課題名で行ってきた研究の節目にあたる。単独のシュレディンガー作用素の量子共鳴の準古典極限における漸近分布をテーマとして研究を行ってきたが、対応する古典力学系（ハミルトン力学系）の捕捉軌道（時間無限大で無限遠に発散しない古典軌道）が、双曲型不動点とそれに付随するホモクリニック及びヘテロクリニック軌道のみからなる場合の量子共鳴の漸近分布を明らかにする問題が大詰めを迎えており、本研究期間中にも完成する見込みとなった。この研究を完成することと、一方で新たな研究の方向性を打ち出すことが本研究期間における目標である。

新たな研究の方向は、作用素を連立作用素に拡張することである。シュレディンガー作用素に限って言えば、行列値のポテンシャルを考えることに対応する。こうした作用素は、特に量子科学においても重要な研究課題である。行列値ポテンシャルの固有値を固有ポテンシャルと呼ぶことにすると、異なる固有ポテンシャルが交差する、別な言葉で言えば、固有ポテンシャルの重複度が変化する場合、作用素の解析は単独の場合に帰着させることはできず、連立の場合特有の困難が生じる。実際、こうした場合に古典力学系の捕捉された軌道という重要な概念をどのように定義すべきかがすでに自明でない問題となり、単独の場合に主な道具として使っていた超局所解析も、連立の場合には必ずしも十分な理論が未だに構築されていない。

そのため、新たな研究の第一歩は、1次元に限ってモデル作用素を徹底的に詳しく調べる方向と、量子共鳴の分布という課題を少し緩めて、スペクトルシフト関数の漸近挙動という課題をより一般的な枠組みで調べるといった方向の2本立てで行う。

2. 研究の目的

シュレディンガー方程式の解、あるいはシュレディンガー作用素のスペクトル、レゾナンスなどの準古典極限における漸近的な挙動、特に古典力学の幾何学的な量との関係を明らかにすることが研究の大きな目的である。具体的には以下の複数の課題を掲げ、研究を同時に行う。

(1) 複数の双曲型不動点とそれに付随するホモクリニック、ヘテロクリニック軌道からなるグラフが生成するレゾナンスの準古典分布を明らかにする。長年にわたって本研究課題で行ってきた研究の最も一般的な場合への拡張である。

(2) 連立のシュレディンガー作用素のレゾナンスの虚部の準古典極限における漸近挙動を調べる。2つのポテンシャルが交差するエネルギーレベルでの解の挙動の解析は、その難しさからこれまでまったくされていない。

(3) 連立のシュレディンガー作用素に対するスペクトルシフト関数の漸近挙動を調べる。スペクトルシフト関数が完全な漸近展開を持つための条件を考える。単独の場合は非捕捉条件がこの条件であったが、連立の場合は非捕捉条件の定義がそもそも自明ではない。

(4) 一次元非線形シュレディンガー方程式の解の準古典漸近挙動を、逆散乱法を用いて解析する。主に逆散乱法における散乱の順問題、すなわち非自己共役な Zakharov-Shabat 作用素の固有値、反射係数の漸近挙動に焦点を当てて研究する。

3. 研究の方法

(1) は、Jean-Francois Bony, Thierry Ramond, Maher Zerzeri との共同研究である。ホモクリニック、ヘテロクリニック軌道が作るグラフの各周期軌道に対して「減衰指数」を定義する。減衰指数を最小化する周期軌道が、虚部の最も小さなレゾナンスの列を決定することが予想できている。この結果を証明して、これまでの一連の結果と合わせて論文を執筆中する。また、研究集会、集中講義などでも成果を発表する。

(2) は、Andre Martinez, 渡部拓也との共同研究である。2つのシュレディンガー作用素を連立させ、相互作用が準古典パラメータのオーダーで小さいとする。ポテンシャルの一方が井戸型で、もう一方のポテンシャルがこれと一点で交差するとしたとき、この交差したエネルギーの近傍でレゾナンスの量子化条件を求め、そこからレゾナンスの漸近分布、特に虚部の漸近的な大きさを調べる。ポテンシャルが交差するエネルギーよりも高いエネルギーのレゾナンスについては、超局所解析を用いて研究する。

(3) は、Mouez Dimassi との共同研究である。先に本研究課題で、シュタルク電場を持つシュレディンガー作用素のスペクトルシフト関数が完全な漸近展開をもつことを非捕捉条件のもとで示したが、この時に使った時間に依存しない方法を用いて連立の場合を解析し、同様の結論を導く。

(4) の研究は、Spyros Kamvissis 及び Jens Wittsten とともに行う。一次元の focusing な非線形シュレディンガー方程式の初期値問題を、逆散乱法を用いて解き、解の準古典挙動を調べたい。この研究で特に私が寄与しようとするのは、対応する Zakharov-Shabat 作用素の固有値の漸近分布と、反射係数の漸近挙動を、完全WKB法を用いて厳密に求めることである。この部分はこの研究分野においては厳密に証明されていなかったことであるが、本研究課題で以前 Lasser, Nedelec とともに研究した一階連立の方程式に対する完全WKB法を用いて厳密に解析することが期待できる。またこの年度には、平成27年度より始めるレゾナンスに関する本（洋書）の執筆を行う。この本では、WKB解析、超局所解析を用いてシュレディンガー作用素のレゾナンスや固有値の準古典漸近分布を調べる方法を解説する。

本研究課題で長年にわたって研究してきたことを、初学者や非専門家にもわかるように改めているいろいろな角度から見直し、背景となる様々な研究とともに紹介する。

研究期間中毎年3月に姫路のイーグレ姫路において、偏微分方程式の国際研究集会"Himeji Conference on Partial Differential Equations"を開催する。本研究課題と関連する他分野の研究と交流し、見識を深める。

4. 研究成果

(1) 古典力学系の双曲型不動点における特異性伝播の定理を得た。双曲型不動点に付随する安定多様体上で準古典波面集合が空集合であれば、不安定多様体上でも準古典波面集合が空集合であるという定理を、生成作用素、消滅作用素を用いて証明することに成功した。また、この特異性伝播の定理を用いて、解析的でない滑らかなポテンシャルの非退化な最大点が生成する量子共鳴の準古典極限における漸近分布を明らかにした。

(2) 行列値ポテンシャルを持つシュレディンガー作用素のスペクトルシフト関数(固有値の個数関数を連続スペクトルに拡張したもの)は、スカラーの散逸関数を持つとき、準古典において完全な漸近展開を持つことを証明した。これは、単独のシュレディンガー作用素に対するRobert-Tamuraの定理の連立作用素への一般化である。行列値ポテンシャルの固有値の交差するとき、連立の場合特有の難しさが生じるが、時間発展作用素を用いる従来の方法を用いず、レゾルベントによる作用素の関数の表示を用いる方法によって、困難を回避した。

(3) 行列値ポテンシャルを持つシュレディンガー作用素の量子共鳴の準古典漸近分布を、エネルギー交差が起きる一次元 2×2 の典型的なモデルに対して研究を行った。エネルギー交差のレベルでの量子共鳴の分布についての結果を得た後、交差レベルより高いエネルギーでの量子共鳴の分布の研究を開始した。後者に対しては、前者で導入した解の構成法に加えて、超局所的な手法を用いて共鳴の幅の漸近挙動を調べている。

(4) 非自己共役なZakharov-Shabat作用素を単位円周上で考察し、完全WKB法を用いて固有値の量子化条件を求め、その漸近分布を明らかにした。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 9 件)

S.Fujiie, J.Wittsten, Quantization conditions of eigenvalues for semiclassical Zakharov-Shabat systems on the circle, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2018, <https://arxiv.org/abs/1703.08352>

J-F.Bony,S.Fujiie,T.Ramond,M.Zerzeri Barrier-top resonances for

non-globally analytic potentials, Journal of Spectral Theory, 査読有, 2017,

<https://arxiv.org/abs/1610.06384>

J-F.Bony,S.Fujiie,T.Ramond,M.Zerzeri Propagation des singularites et resonances, Comptes Rendus Mathematique, 査読有, 355,2017 887-891,

<https://arxiv.org/abs/1704.03798>

M.Assal,M.Dimassi,S.Fujiie, Semiclassical trace formula and spectral shift function for systems via a stationary approach, International Mathematics Research Notices, 査読有, 2017, <https://arxiv.org/abs/1702.07880>

S.Fujiie,A.Martinez,T.Watanabe,Molecular predissociation resonances near an energy-level crossing II:Vector field interaction, Journal of Differential Equations, 査読有, 262, 2017, 5880-5895, 10.1016/j.jde.2017.02.017

S.Fujiie,A.Martinez,T.Watanabe, Quantization condition of resonances at energy-level crossing, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B61, 2017, 9-21,

J-F.Bony,S.Fujiie,T.Ramond,M.Zerzeri Quantization condition for multi-barrier resonances, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B67, 2017, 43-54

S.Fujiie,A.Martinez,T.Watanabe,Molecular predissociation resonances near an energy-level crossing I:Elliptic interaction, Journal of Differential Equations, 査読有, 260, 2016, 4051-4085, 10.1016/j.jde.2015.11.015

M.Dimassi and S.Fujiie, A time-independent approach for the study of the spectral shift function and an application to Stark Hamiltonians, Communications in Partial Differential Equations, 査読有, 40, 2015, 1787-1814, 10.1080/03605302.2015.1053567

[学会発表](計 8 件)

S.Fujiie, Resonances semiclassiques aux sommets, Seminaire Math-Physique, 2017

S.Fujiie, Propagation of Singularities at a hyperbolic fixed point and application to the quantization of resonances, Toshio Kato Centennial Conference, 2017 S.Fujiie, Microlocal method for the semiclassical distribution of quantum

resonances, 2nd Summer School: Various Aspects of Mathematical Physics, 2017
S.Fujiie, Microlocal method for the semiclassical distribution of resonances, Workshop on the Boltzmann Equation, Microlocal Analysis and Related Topics, 2016

S.Fujiie, Quantization of resonances in the semiclassical limit, Topics in Matematica, 2016

藤家雪朗, Resonances near an energy-level crossing, 第2回 解析学の耳袋, 2015

S.Fujiie, Resonances near an energy-level crossing, Microlocal Analysis and Singular Perturbation Theory, 2015

藤家雪朗, 捕捉された古典軌道と量子共鳴極の漸近分布, 研究集会「共鳴極と測地線の幾何の再解釈と新展開」2015

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藤家 雪朗 (FUJIE, Setsuro)

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号: 00238536