

令和元年6月5日現在

機関番号：34316

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04972

研究課題名(和文) 楕円関数による解表示の探求と大域的分岐構造解析

研究課題名(英文) Pursuit of explicit representation formula using elliptic and analysis of the global bifurcation structure

研究代表者

四ツ谷 晶二 (YOTSUTANI, SHOJI)

龍谷大学・理工学部・教授

研究者番号：60128361

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：楕円関数を用いて微分方程式のすべての候補となる解の表示式を求め、それをもとに、大域的分岐構造を凝縮した超越方程式を導き解析する、独自の手法を深化させさまざまに適用範囲を広げることができた。

例えば、cross-diffusion 方程式で空間1次元の場合の楕円関数による解表示から示唆を得た、空間多次元の場合の定常解の存在と安定性に関する結果を得た。また、線形化固有値問題については、Allen-Cahn 型反応拡散方程式の場合に線形化固有値問題の固有値を決定する固有方程式を発見し、すべての固有値と固有関数の表示式を厳密に求めた。さらに、拡散係数が零に近づいたときの固有値の漸近公式も得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

従来、微分方程式の解の存在のための条件を求めたり、局所的な解の分岐構造に対して、現代的関数解析的な手法により多くの数学的研究がなされ現在も発展を続けている。さらに詳しく精密に解の形状を知ること、解の大域的な分岐構造の解明はより困難な問題である。しかし、生物学の発生や生命現象等にあらわれる数理モデルに対して、数学的な結果を利用できるようにするためには、是非とも克服すべき問題である。

我々は、基本的で典型的ないくつかの微分方程式で記述される数理モデルに対し、特異摂動問題の解の精密な陽的表示、さまざまな極限形状の精密表示、2次分岐等も含めた解の大域的な分岐構造等の数学的解明を行なった。

研究成果の概要(英文)：We have deepened our original method and extended its scope in order to solve various problems for differential equations. We obtain all the candidate solutions and derive transcendental equations which are equivalent to problems to be solved. For instance, as for a cross-diffusion equation, we obtained the stability of stationary solutions in multidimensional case, which is inspired by 1 dimensional case results obtained by our method. As for linearized eigen-value problems for reaction diffusion equations, we have obtained all exact values of eigen-values and representation formulas of eigen-functions for Allen-Cahn type reaction diffusion equations. Moreover, we have asymptotic formulas of eigen-values as diffusion coefficients converge to zero.

研究分野：大域解析学

キーワード：非線形境界値問題 完全楕円積分 楕円関数 交差拡散方程式 反応拡散方程式 極限方程式 非局所線形化固有値問題

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19、CK - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

解の存在のための十分条件を求めるとか、局所的な解の分岐構造に対しては、現代的な関数解析的な手法により多くの研究がなされ現在も発展を続けているが、精密に解の形状を知ることや、解の大域的な分岐構造を完全に解明することは手法的な限界もあり困難な問題である。しかしながら、ここ数十年、急速に研究が発展してきている。

### 2. 研究の目的

我々は、十数年前に、重要で典型的な非線形境界値問題や非局所非線形境界値問題に対し、すべての解を楕円関数を用いて陽的に表示しそれを活用することにより、従来極めて困難と思われていた2次分岐以降をも含む完全な大域的分岐構造の解明方法を発見した。

以来、重要で典型的なさまざまな方程式の大域的分岐構造の完全解明、特異摂動問題の解の極限形状の精密な表示に関する未解決問題を解決してきている。

同時に、重要で典型的な線形化固有値問題の解の陽的表示式を得、固有値の精密な漸近挙動と固有関数の形状に関する美しく不思議な事実も発見している。それらの事実の数学的な証明には、新しいアイデアと数式処理ソフトを用いた膨大な計算を必要とする。

研究目的は、未完の証明を完結させ、同時にこの手法を発展させ適用範囲を拡大することである。

### 3. 研究の方法

以下の問題に焦点をあてて研究をすすめる。

(1) 交差拡散方程式の極限方程式の定常解の大域的分岐構造解明のため楕円関数による、解表示を改良し定常解の一意性・多重性の証明を完結する。

(2) 細胞極性の数理モデルにおいて、楕円関数による解表示を解析し、大域的分岐シートの性質と定常解の大域的分岐構造を明らかにし、さらに、定常解の安定性の数学的な証明を発見する。

(3) 次数の高い非線形項をもつ重要かつ典型的な反応拡散方程式の線形化固有値問題の固有値を決定する方程式を導出し、楕円関数による固有関数の表示式を求め、さらに、拡散係数を零に近づけたとき固有関数の極限形状を解明する。

(4) 周期境界条件下での微分非線形シュレディンガー方程式のすべての進行波を、楕円関数を用いて具体的に構成し、完全な分類を行う。

### 4. 研究成果

上記で述べたことにできる限り対応させて、得られた研究成果を説明していく。

(1) 交差拡散方程式 (cross-diffusion 方程式) については、交差拡散の効果をあらかずパラメータを無限大とした定常極限方程式、および、パラメータが十分大の場合、拡散係数が定常解存在域の上限に近づいた状況での、空間多次元の安定な定常解の存在に関する画期的な定理を Y. Lou 教授, W.-M. Ni 教授との共著で英文誌 DCDS-A に発表した。

空間1次元で一般的な定常極限方程式に対しては、これまでずっと定常解は高々2個存在すると思われていたが、拡散係数が極めて小さいとき、定常解が3個存在するパラメータ領域が存在することを、楕円関数を用いた解の表示式に基づく、半解析的方法により数値的に示した。さらに、線形化方程式を離散化して行列の一般化固有値問題を導出して、固有値の様子を詳細に調べて、線形化安定性・不安定性を数値的に明らかにした。これらのことを、森竜樹博士、鈴木貴教授との共著で英文誌 Math. Models and Meth. in Appl. Sci. に発表した。

解の一意性と重複度については、半解析的方法より、パラメータに応じての、それらの変化を数値的に状況把握した。一意性の成立状況での数学的証明は成功しているが、計算があまりに膨大となってしまったので、英文誌に発表のために証明の簡明化と改良に取り組んでいる。

(2) 細胞極性を記述するある数理モデルにおいて、拡散係数を無限大とした定常極限方程式の、単調解の存在・非存在・一意性・多重性に関する、大域的構造を解明した。すべての解は単調解の折り返しで得ることができるので、これにより、すべての解の大域的構造が明らかとなった。同時に、個々の解の形状の詳細も明らかにした。

これらの結果を得ることは既存の手法では不可能と思われていたが、数式処理ソフトを利用して膨大な厳密計算を行なうことにより、楕円関数による解表示を得て、すべての解の候補全体をあらかずシート構成し、シートの等高線が滑らかな曲線であり一価関数のグラフとなっていることを示した。楕円関数による解表示とシートの構成については、森竜樹博士、久藤衡介教授、長山雅晴教授、辻川亨教授との共著で、AIMS の Proceeding に発表した。また、等高線が滑らかな曲線であり一価関数のグラフとなっていることの証明は、森博士、久藤教授、辻川教授との共著で英文誌 DCDS-A に発表した。

(3) 線形化固有値問題については、従来困難と思われていた、重要で典型的な Neumann 境界条件下での、空間1次 Allen-Cahn 方程式の線形化固有値問題の、固有値・固有関数の楕円関数を用いた表示式を求めて、固有値の漸近公式、固有関数の極限形状を明らかにした。これを若狭准教授との共著で、J. Differential Equations に発表した。

(4) 周期境界条件下での微分非線形シュレディンガー方程式がこれまで知られているものの他に極めて多様な進行を持つことを楕円関数を用いて具体的に構成して示した。この結果は、村

井実博士, 坂元国望教授との共著で AIMS の Proceeding に発表した. さらに膨大な計算を必要とはするが全体からみるとまだまだ多数存在することを数値実験で確認作業をつづけているところである.

(5) 関連する新しい数理モデルとして, 非線形項が解の定積分値で定まる非局所項を含む Neumann 境界条件下での空間 1 次元 Allen-Cahn 方程式の定常解の大域的分岐構造を, 森博士, 久藤教授, 辻川教授との共著で欧文誌に発表した.

(6) 分担者の森田教授は質量保存則をもつ反応拡散方程式系の統一的立場から調べている. さらに, 代表者, 分担者, J.S.Guo 教授で, 研究課題に関連した quenching 問題についての共著論文を発表した.

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文](計 18 件)

S. Jimbo and Y. Morita: Entire solutions to reaction-diffusion equations in multiple half-lines with a junction, *J. of Differential Equations*, 267(2019), 1247-1276.

査読有 DOI: 10.1016/j.jde.2019.02.008

K. Kuto, T. Mori, T. Tsujikawa and S. Yotsutani: Global solution branches for a nonlocal Allen-Cahn equation, *J. of Differential Equations*, 264(2018), 5928-5949.

査読有 DOI: 10.1016/j.jde.2018.01.025

T. Mori, T. Suzuki and S. Yotsutani: Numerical approach to existence and stability of stationary solutions to a SKT cross-diffusion equation, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 28(2018), 2191-2210.

査読有 DOI: 10.1142/S0218202518400122

E. Latos, T. Suzuki, and Y. Morita: Stability and spectral comparison of a reaction-diffusion system with mass conservation, *J. Dyn. Diff. Equat.*, 30(2018), 823-844. 査読有 DOI: 10.1016/j.jde.2017.09.015

J.-L. Chern, Y. Morita and T.-T. Shieh: Asymptotic behavior of equilibrium states of reaction-diffusion systems with mass conservation, *J. of Differential Equations*, 264(2018), 550-574. 査読有 DOI: 10.1016/j.jde.2018.01.025

Y. Morita and Sakamoto: A diffusion model for cell polarization with interactions on the membrane, *Japan J. Indust. Appl. Math.* 35(2018), 261-276.

査読有 DOI: 10.1007/s13160-017-0290-810.1007/s13160-017-0290-8

K. Kuto, T. Mori, T. Tsujikawa and S. Yotsutani: Secondary bifurcation for a nonlocal Allen-Cahn equation, *J. of Differential Equations*, 263(2017), 2687-2714.

査読有 DOI: 10.1016/j.jde.2017.04.010

J.-L. Chern, S. Yotsutani and N. Kawano: A note on the uniqueness and structure of solutions to Dirichlet problems for some elliptic systems, *Proceedings of EQUADIFF 2017*, 283-286. 査読有

<http://www.iam.fmph.uniba.sk/amuc/ojs/index.php/equadiff/article/view/814/575>

S. Jimbo and Y. Morita: Nonlocal eigenvalue problems arising in a generalized phase-field-type system. *Japan J. Indust. Appl. Math.* 34(2017), 555-584.

査読有 DOI: 10.1007/s13160

T. Mori, K. Kuto, T. Tsujikawa and S. Yotsutani: Exact multiplicity of stationary limiting problems of a cell polarization model, *DCDS-A*, 36(2016), 5627-5655.

査読有 DOI:10.3934/dcds.2016047

T. Wakasa and S. Yotsutani: Limiting classification on linearized eigenvalue problems for 1-dimensional Allen-Cahn equation II – Asymptotic profiles of eigenfunctions, *J. of Differential Equations*, 261(2016), 5465-5498.

査読有 DOI: 10.1016/j.jde.2016.08.016

J.-S. Guo, Y. Morita and S. Yotsutani: Self-similar solutions for a quenching problem with spatially dependent nonlinearity, *Nonlinear Analysis*, 147(2016), 45-62.

査読有 DOI: 10.1016/j.na.2016.08.026

Y. Morita and N. Shinjo: Reaction-diffusion models with conservation law and pattern formation, *Josai Mathematical Monograph*, 9(2016), 177-190.

査読有 DOI: 10.20566/13447777\_9\_177

T. Mori, K. Kuto, T. Tsujikawa and S. Yotsutani: Exact multiplicity of stationary limiting problems of a cell polarization model, *DCDS-A*, 36(2016), 5627-5655.

査読有 DOI:10.3934/dcds.2016047

Y. Lou, W.-M. Ni and S. Yotsutani: Pattern formation in a cross-diffusion system, *DCDS-A*, 35(2015), 1589-1607.

査読有 DOI: 10.3934/dcds.2015.35.1589

T. Mori, K. Kuto, T. Tsujikawa, M. Nagayama and S. Yotsutani: Global bifurcation sheet and diagrams of wave-pinning in a reaction-diffusion model for cell polarization, *AIMS Proceedings*, 2015, 866-871. 査読有 DOI: 10.3934/proc.2015.0861

M. Murai, K. Sakamoto and S. Yotsutani: Representation formula for traveling waves to a derivative nonlinear Schrödinger equation with the periodic boundary condition, AIMS Proceedings, 2015, 878-900. 査読有 DOI: 10.3934/proc.2015.0878  
M. Kuwamura and Y. Morita: Perturbations and dynamics of reaction-diffusion systems with mass conservation. Phys. Rev. E, 92(2015), 012908.  
査読有 DOI: 10.1103/PhysRevE.92.012908

[学会発表](計 17 件)

Y. Lou, T. Mori, W.-M. Ni, S. Yamakawa and S. Yotsutani: Solution structure of stationary solutions of a limiting SKT cross-diffusion equation, The 10th Taiwan-Japan Joint Workshop for Young Scholars in Applied Mathematics, Feb.27 - March 1, 2019, Ryukoku University.

S. Yotsutani: Global bifurcation structure of a limiting system to the SKT competition model with cross-diffusion, RIMS 共同研究(公開型)常微分方程式の定性的理論および数理モデル研究への応用, Nov.12-14, 2018, RIMS, Kyoto University.

森 竜樹, 鈴木 貴, 四ツ谷 晶二: SKT 交差拡散定常極限方程式の解の多重度と安定性の数値解析, 日本応用数理学会, 2018年9月3日~5日, 名古屋大学.

T. Mori, Y. Lou, H. Matsubara, W.-M. Ni, S. Sukekuni and S. Yotsutani: Existence, nonexistence, multiplicity, and numerical stability of solutions for the SKT cross-diffusion stationary limiting equation, The 12th AIMS Conf. on Dyn. Sys, Diff. Eq. and Appl., July 5 - 9, 2018, Taiwan Univ., Taipei, Taiwan.

K. Kuto, Y. Miyamoto, T. Mori, T. Tsujikawa and S. Yotsutani: Bifurcation structure of steady states for the one-dimensional nonlocal Allen-Cahn equation, The 12th AIMS Conf. on Dyn. Sys, Diff. Eq. and Appl., July 5-9, 2018, Taiwan Univ., Taipei, Taiwan.

M. Murai and S. Yotsutani: On the asymptotic form of solutions of the Tadjbakhsh-Odeh's variational problem, The 12th AIMS Conf. on Dyn. Sys, Diff. Eq. and Appl., July 5 - 9, 2018, Taiwan Univ., Taipei, Taiwan.

Y. Lou, T. Mori, W.-M. Ni, S. Yamakawa and S. Yotsutani: Multiplicity of stationary solutions of a limiting SKT cross-diffusion equation, The 9th Taiwan-Japan Joint Workshop for Young Scholars in Applied Mathematics, March 3 - March 5, 2018, National Cheng Kung University, Tainan, Taiwan.

Y. Lou, H. Matsubara T. Mori, W.-M. Ni and S. Yotsutani: Uniqueness proof of stationary solutions of a limiting SKT cross-diffusion equation, The 9th Taiwan-Japan Joint Workshop for Young Scholars in Applied Mathematics, March 3 - March 5, 2018, National Cheng Kung Univ., Tainan, Taiwan.

Y. Lou, Y. Masuda, T. Mori, W.-M. Ni and S. Yotsutani: Stability of stationary solutions of a limiting SKT cross-diffusion equation, The 9th Taiwan-Japan Joint Workshop for Young Scholars in Applied Mathematics, March 3 - March 5, 2018, National Cheng Kung University, Tainan, Taiwan.

Y. Morita: Turing-type instability in coupled equations of bulk and lateral diffusions, ReaDiNet2018, Oct. 31-Nov. 3, Utop Ubless Hotel, Jeju, Korea.

Y. Morita: Entire solutions to reaction-diffusion equations in a domain of star graph, The 43rd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, Aug. 21 - 23, 2018, Hokkaido University.

Y. Morita: Entire solutions of reaction-diffusion equations in multiple semi-infinite intervals with a junction, The 12th AIMS Conf. on Dyn. Sys, Diff. Eq. and Appl., July 5 - 9, 2018, Taiwan Univ., Taipei, Taiwan.

Y. Morita: Turing-type instability of diffusion equations with mass transport through the boundary, The 12th AIMS Conf. on Dyn. Sys, Diff. Eq. and Appl., July 5 - 9, 2018, Taiwan Univ., Taipei, Taiwan.

Y. Morita: Entire solutions to a reaction-diffusion equation in a domain of half-lines with a junction, Infinite Dimensional and Stochastic Dynamical Systems, June 30-July 4, 2018, Southwestern Mathematical Center in Sichuan University, Chengdu, China.

Y. Morita: Entire solutions to a reaction-diffusion equation in a domain of half-lines with a junction, Infinite Dimensional and Stochastic Dynamical Systems, June 30-July 4, 2018, Southwestern Mathematical Center in Sichuan University, Chengdu, China.

Y. Morita: Entire solutions to a reaction-diffusion equation in multiple semi-infinite intervals with a junction, International Conference on Nonlinear Analysis and its Applications, March 23-24, 2018, Tamkang University, Tamsui, New Taipei City, Taiwan.

Y.Morita: Turing-type Instability of Diffusion Equations with Mass Transport through the Boundary, The Third International Conference on the Dynamics and Differential Equations: Fundamentals and Developments -- In Memory of Professor Jack K. Hale--, March 14-18, 2018, Hiroshima University.

〔図書〕(計 件)  
〔産業財産権〕  
出願状況(計 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
出願年：  
国内外の別：  
取得状況(計 件)

名称：  
発明者：  
権利者：  
種類：  
番号：  
取得年：  
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等  
<http://www.ryukoku.ac.jp/who/detail/592188/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

研究分担者氏名： 森田 善久

ローマ字氏名： MORITA YOSHIHISA

所属研究機関名： 龍谷大学

部局名： 理工学部

職名： 教授

研究者番号(8桁)： 10192783

### (2) 研究協力者

研究協力者氏名：

ローマ字氏名：

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属されます。