

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 25 日現在

機関番号：82723

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04973

研究課題名(和文) 定曲率空間における非線形楕円型方程式の解構造の研究

研究課題名(英文) A study of the structure of the solutions of nonlinear elliptic equations in spaces of constant curvature

研究代表者

渡邊 宏太郎 (Kohtaro, Watanabe)

防衛大学校(総合教育学群、人文社会科学群、応用科学群、電気情報学群及びシステム工・電気情報学群・教授)

研究者番号：30546057

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：一般化されたPohozaev関数の構成を通じた定曲率空間における非線形楕円型方程式の正值球対称解の一意性に対応する汎関数の臨界点の非退化性の研究、定曲率空間上のp-ラプラス作用素を含む非線形方程式(Euler-Lagrange方程式)の解の性質の研究、離散ソボレフ不等式の最良定数の決定問題の研究を行った。これらの研究に関する成果は、4編の学術論文誌に掲載された。定曲率空間上のp-ラプラス作用素を含む非線形方程式の変分解の性質の研究については、やや研究が遅れ、現時点では学術論文誌の掲載に至っていない(現在、投稿中)。

研究成果の概要(英文)：According to the initial plan, uniqueness of the positive radial solution of nonlinear elliptic equations in the space of constant curvature thorough generalized Pohozaev identity and its non-degeneracy, properties of the solutions of the Euler-Lagrange equations including p-Laplace operator in the space of constant curvature and detection of best constant of discrete Sobolev inequality were studied. Results of these studies were published in four papers. Although the study of p-Laplace operator in the space of constant curvature could not show significant progress. The result of this study is not published at present.

研究分野：函数方程式論

キーワード：一般化Pohozaev関数 正值球対称解 定曲率空間 p-ラプラス作用素

1. 研究開始当初の背景

2012-14年頃にかけて n 次元開球上 D で Dirichlet 条件下の半線形楕円型方程式

$\Delta u(x) + f(|x|, u(x)) = 0, x \in D; u(x) = 0, x \in \partial D$ の正值解の球対称性に興味をもち、研究を行った。これは、基本的には Gidas-Ni-Nirenberg の方法に基づくが、 D に楕円幾何、双曲幾何計量を導入し、結果を得る方法である。こうして得た正值球対称解の一意性について、自然な流れとして興味をもつに至った。但し、非線形項については、一般形では困難が予想されるため、次の形

$f(|x|, u(x)) = -g(|x|)u(x) + h(|x|)u(x)^p = 0$ に限定して考察することとした。こうすることにより Pohozaev 型の恒等式が利用できる。このこと自体は、本研究計画以前に連携研究者の塩路直樹氏とともに J. Differential Equations, vol. 255, (2013)において示していた。本研究計画では、一意な正值球対称解の対応する汎関数の非退化性についてさらに研究を進めることとした。非退化性を示すことにより、正值球対称解からの分岐解の構成問題等への応用が見込まれるためである。また、特に球面、双曲空間上における Brezis-Nirenberg 問題を典型例として扱うこととした。幾何学的な性質が方程式に反映され、興味深いためである。

同様の理由で、並行して球面、双曲平面上において p -ラプラス作用素を含む方程式、特に L^p 弾性曲線の停留曲線の研究を計画した。2次元平面上の L^p 弾性曲線には、flat-core 解というフラットな部分をもつ特異な解が存在することを以前に示していたが、このような解が2次元球面、双曲平面上にも存在するか、またそれは、幾何学的な性質を反映するものであるかという問題である。

また、Sobolev 不等式の最良定数の決定問題に研究分担者の山岸弘幸氏、亀高惟倫氏、永井敦氏、武村一雄氏と共に以前から取り組んでいたが、この問題についても発展させるよう計画した。

2. 研究の目的

① 非線形楕円型方程式の解の存在、正值球対称解の一意性、非退化性について新たな知見を得ること。特にユークリッド空間とそれ以外の定曲率空間で上記の性質が曲率にいかに関与されるかを調べること。

② 球面、双曲空間上において L^p 弾性曲線の停留曲線について調べる。以前にユークリッド空間において、 L^p 弾性曲線の停留曲線について調べた。球面、双曲空間の場合は、停留曲線の曲率のみならず方程式の解から、停留曲線を実現する部分にも困難な部分がある。

③ Sobolev 不等式の離散バージョンへの発展。1次元 Sobolev-Hilbert 空間 $H^m(0, a)$ は $L^p(0, a)$ に埋め込まれるが、この埋め込みを表す不等式の最良定数は、この空間の再生核を使って表現することができる。この離散

バージョンは、グラフ上の関数の不等式となる。これを離散 Sobolev 不等式とよぶ。対応する再生核は、Moore-Penrose 一般逆行列となる。この関係を利用し、様々なグラフの離散 Sobolev 不等式の最良定数を求める。

上記の問題の研究を通して微分方程式論の発展に貢献することを目的とする。

3. 研究の方法

研究課題の問題点について、研究分担者、連携研究者と頻りに研究打ち合わせを行い、進めた。基本的には、不等式評価を重ね証明を進めて行くが、研究課題には等式の理解が重要な役割を果たす部分がある。これらの理解に幾つかの数式処理ソフトウェアを有効に活用した。

(1) 半線形楕円型方程式の正值解の一意性及び対応する汎関数の非退化性の問題。この研究においては、Pohozaev 型の恒等式を扱うが、積分恒等式内の被積分関数の挙動が重要となる。被積分関数の符号変化が高々1回ということが必要とするが、そのために $g(|x|)$ 、 $h(|x|)$ にどのような条件が課せられるか、数値実験を通して見通しを立てる必要があった。

(2) 球面、双曲平面上における L^p 弾性曲線の停留曲線の構成問題。この研究においては、Euler-Lagrange 方程式から球面、双曲平面上の曲線を構成する際、大変な計算を要求される。第一にこの部分に利用した。また、停留曲線の形状は、想像が付きにくいものがあり、曲線の描画にも利用した。特に曲線の形状がパラメータに関して不連続に変わる現象を数値シミュレーションにより発見し、またその証明を得た。数値シミュレーション無しにこの現象に気づくのは難しかったのではないかと思われる。

(3) Sobolev 不等式の離散バージョンへの発展の問題。切頂多面体やフラーレン族に対応するグラフの Moore-Penrose 一般逆行列を求める際に利用した。これらの計算を数式処理ソフトウェアの援用なしに行うことは大変困難である。1次元 Sobolev-Hilbert 空間 $H^m(0, a)$ の $L^p(0, a)$ への埋め込み不等式の最良定数を求める際にも再生核の対角値の挙動を知る必要があり、数値計算が証明の方針のために必要となる。

4. 研究成果

(1) 半線形楕円型方程式の正值解の一意性及び対応する汎関数の非退化性の問題。

一般化された Pohozaev 恒等式を用いて、Dirichlet 条件下で方程式

$f(|x|, u(x)) = -g(|x|)u(x) + h(|x|)u(x)^p = 0$ の正值球対称解の一意性および対応する汎関数の非退化性を示した。具体的な問題として、スカラー場方程式、松隈方程式、調和ポテンシャルを持つ非線形シュレディンガー方程式、Haraux-Weissler 方程式、球面上の Brezis-Nirenberg 問題が扱えることを示し

た(雑誌論文①)。さらに双曲空間上の Brezis-Nirenberg 問題の正值球対称解の一意性も雑誌論文②で示した。双曲平面の場合に Mancini-Sandeep, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. Cl. Sci. 2008 で得られていた結果を改良することができた。

(2) 球面、双曲平面上における L^p 弾性曲線の停留曲線の構成問題。

2次元球面上の弾性曲線の停留曲線を構成した。特に flat-core 解という測地線上に平坦部分をもつ閉曲線となる解の存在を示した(文献5)。 L^p 弾性曲線の停留曲線は微分可能性が C^2 級しか保証されない場合があり、取り扱いが難しい。特に停留曲線上で定義される Killing ベクトル場を球面や双曲平面全体に拡張可能であることを示す部分が難しいように思われる。この部分を回避する方法を発展させることができた。これらの結果を学術論文誌に投稿し、採択された(現時点では発行されていない)。その他に上述のように特に曲線の形状がパラメータに関して不連続に変わる現象を見出し、証明することができた。これは $p=2$ の場合には Arroyo らによって既に示されたことを後から知ったが、一般の p についての結果は知られていないように思われる。Arroyo らは楕円関数の積分の計算を通して結果を得ているので、一般の p の場合にその方法を適用するのは難しい。この部分の結果は未発表なので、然るべき機会に報告したいと考えている。

(3) Sobolev 不等式の離散バージョンへの発展。

切頂多面体やフラーレン族に対応するグラフを考え、その頂点上の関数 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_V)$ を考える。離散ソボレフ不等式とは A をグラフのラプラシアン行列としたとき $\max |u_i|$ を $E(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^* A \mathbf{u}$ 等の定数倍で抑える不等式である。こうした不等式の最良定数を Moore-Penrose 一般逆行列を構成し、求めた(雑誌論文②, ③)。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 5件)

- ① Naoki Shioji and Kohtaro Watanabe, Uniqueness and nondegeneracy of positive radial solutions of $\operatorname{div}(\rho \nabla u) + \rho(-gu + hu^p) = 0$, Calculus of Variations and Partial Differential Equations, Vol. 55, Article No. 32, 2016, 査読有, DOI:10.1007/s00526-016-0970-2
- ② 亀高惟倫, 山岸弘幸, 永井敦, 渡辺宏太郎, 武村一雄, 切頂正 4,6,8 面体上の離散ソボレフ不等式の最良定数, 日本応用数理学会論文誌, 25, 3, 135-150, 2016, 査読有, https://doi.org/10.11540/jsiamt.25.3_135

- ③ Yoshinori Kametaka, Atsushi Nagai, Hiroyuki Yamagishi, Kazuo Takemura, Kohtaro Watanabe, The best constant of Discrete Sobolev inequality on the C_{60} Fullerene Buckyball, J. of the Physical Soc. of Japan, 84, Article No. 074004, 2015, 査読有
- ④ Naoki Shioji and Kohtaro Watanabe, Uniqueness of positive solutions of Brezis-Nirenberg problems on H^n , Linear and non-linear analysis, Vol.1, 2, 261-270, 2015, 査読有
- ⑤ 塩路直樹, 渡辺宏太郎, On the existence of p -elastic closed curves and flat-core solutions in $S^2(G)$, 数理解析研究所講究録, 1959, 35-54, 2015, 査読無, <https://repository.kulib.kyoto-u.ac.jp/dspace/bitstream/2433/224103/1/1959-03.pdf>

[学会発表] (計 6件)

- ① 渡辺宏太郎, 半線型楕円型方程式の正值球対称解の一意性と応用, 微分方程式の総合的研究, 2017年
- ② 渡辺宏太郎, Bifurcation and symmetry breaking for Brezis-Nirenberg problem on S^2 , RIMS 共同研究, 実領域における常微分方程式研究の継承と革新, 2017年
- ③ Yoshinori Kametaka, Kohtaro Watanabe, Hiroyuki Yamagishi, Riemann zeta function, Bernoulli polynomials and the best constant of Sobolev inequality, FSDM2017, 2017
- ④ 渡辺宏太郎, 塩路直樹, S^2 上の薄い円環領域における Brezis-Nirenberg 問題の非球対称な分岐解の構成について, 函数方程式論分科会, 日本数学会 2017 年度秋季総合分科会, 2017年
- ⑤ 渡辺宏太郎, 塩路直樹, n 次元双曲空間上の Brezis-Nirenberg 問題の正值解の一意性について, 函数方程式論分科会, 日本数学会 2016 年度年会, 2016年
- ⑥ 渡辺宏太郎, n 次元双曲空間上の Brezis-Nirenberg 問題の正值解の一意性について, 微分方程式論ワークショップ - 岐阜 2016, 2016年

6. 研究組織

(1) 研究代表者

渡辺宏太郎 (WATANABE Kohtaro)
防衛大学校・電気情報学群・教授
研究者番号：30546057

(2) 研究分担者

山岸弘幸 (YAMAGISHI Hiroyuki)
東京都立産業技術高等専門学校・ものづくり
工学科・准教授
研究者番号：10448053

(3) 連携研究者

亀高惟倫 (KAMETAKA Yoshinori)
大阪大学・名誉教授
研究者番号：00047218

塩路直樹 (SHIOJI Naoki)
横浜国立大学・大学院工学研究院・教授
研究者番号：50215943