

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 2 年 7 月 13 日現在

機関番号：32619

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2019

課題番号：15K04980

研究課題名(和文) グラフの部分構造と次数を制限した木の研究

研究課題名(英文) On the structure of subgraphs and degree bounded trees in graphs

研究代表者

松田 晴英 (Haruhide, Matsuda)

芝浦工業大学・工学部・教授

研究者番号：00333237

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)：グラフの因子問題とは、与えられたグラフに対して、特定の性質をみたす全域部分グラフを見つけるという問題である。本研究では主に、次の成果を得た。

(1) グラフ全体でもつ構造がグラフの一部にもあり得るかを研究し、グラフの全体で知られている性質との関連性を追及した。(2) グラフの木の構造を様々な角度から検証し、その存在定理の解決方法を提示した。(3) 上記2点の融合を提案し、新たなグラフの方向性を示した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

グラフの因子理論は少々粗い表現をすれば、複雑なネットワークにおいて、所望のネットワークが存在するための様々な数学的条件をみつけようとする分野である。昨今のネットワーク社会において、その重要性は益々増大していきと思われる。このような状況下で本研究は、因子理論における、今までの流れを考慮しつつ、新たな方向性を確立しようとするものである。これは多くの未解決問題を提供するだけでなく、この研究での成果は、ネットワーク分野等の工学での応用も期待される。

研究成果の概要(英文)：The graph factor problem is the problem of finding the spanning subgraphs satisfying certain properties in a given graph. The main results of this research are as follows.

(1) We investigated whether the structure of the entire graph might exist in a certain subgraph, and verified the relationship with the known properties of the graph. (2) The structure of the trees in graphs was verified by various points of view, and the sufficient conditions presented. (3) We also showed the new research of graph theory.

研究分野：グラフ理論

キーワード：応用数学 離散数学 グラフ理論 因子 木

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

グラフの因子理論は、グラフという概念が誕生した初期のころから長きに亘って研究され続けている歴史が長い分野のひとつであり、現在においても国内外で活発に研究されている重要課題である。例えば、過去にはアメリカの Vanderbilt University において、グラフの因子に特化した研究集会が開かれたことがあるほどである。また、これまでの経緯および現在の活発な研究状況から推測すると、グラフ因子は今後もグラフ理論の中心的課題のひとつとして研究されていくと思われる。

この分野における最も大きな成果は、Tutte、Lovasz によって得られたグラフが、ある因子をもつための必要十分条件である。しかし、これらの結果には、主に次の 3 つの問題点がある。

- (1) これら必要十分条件は、かなり複雑な評価式である。
- (2) 与えられたグラフにおいて、指定した部分グラフに特定の性質をみだす構造があるか否かが一般には判定できない。
- (3) 対象となる因子が、連結であるか否かが判定できない。

(1) の問題に対しては、グラフが所望の因子をもつための簡明な十分条件を得ることが近年の重要な研究課題であり、これまで私を含め、十数年の間に国内外の多くの研究者が多くの結果を出している。

(2) の問題に対しては、私の過去の研究[1]で、グラフ因子の基本的構造ともいえるマッチングを自然に拡張した概念である奇次数部分グラフに対し、この奇次数部分グラフがグラフの一部分を覆うための必要十分条件を得ることができた。これはグラフ全体での結果をグラフの一部分へも自然に拡張できた萌芽的結果であり、グラフ全体のもつ様々な構造が部分グラフにもあり得るのではないかということに注目するきっかけとなった。実際、さらに研究を進めると、平成 13~14 年度には加納幹雄茨城大学教授と私との共同研究において、これまでに知られている多くの因子を包含する新たな因子を定義し、グラフがこの因子をもつための必要十分条件を得ることができた。この結果を掲載している論文は、その referee's report において、"The publication is strongly recommended." との評価を頂き、国際専門誌に掲載されている。これらにより、(2) の問題を部分的に解決している。

(3) の問題については重大とされながらも、これまであまり研究がなされていなかった。

2. 研究の目的

上記の学術的背景を踏まえ、本研究では、冒頭の研究概要で示した 3 点を研究目的とする。研究目的(1)については、その構造が徐々に明らかとなりつつあるが、研究開始段階ではまだ、十分な解決には至っていない。特に、グラフに関して所望の構造があるか否かという課題は、グラフ全体であれば多くの性質が知られているにも関わらず、一部分に注目した結果は、最近になって活発化してきた研究であるため、解決すべき課題が多く残されている。しかし、着実に成果は上がっているため、これを交付希望期間内に解決したいと考えた。

3. 研究の方法

平成 27、28 年度は、グラフ全体でもち得る構造が部分グラフにもあるかを追求し、グラフ全体での結果との関連性を明らかにした。また、平成 29、30 年度は、因子に連結性を付加し、既存の結果を拡張した。特に、各点から出る辺の本数に制限を付けた木の存在条件について、因子理論で得られている条件を適用し、解決を図った。さらに最終年度は、上記の融合的な分野を開拓し、証明手法の確立を目指した。

平成 27 年度の研究計画

グラフ全体に対する因子については、今日までのグラフ因子理論における重要課題のひとつであり、多くの研究者が多くの結果を出している。平成 27 年度の研究課題においては、グラフ全体でなく、グラフの指定した一部にも同様な性質があるかについて追求しようとするものである。過去の研究では、マッチングを自然に拡張した概念である奇次数部分グラフという概念に対し、グラフの部分グラフをこの奇次数部分グラフが覆うための必要十分条件を得ることができた。これはグラフ全体での結果をグラフの一部分へも自然に拡張できた例といえる。また、これをきっかけとして、グラフ全体にある構造がグラフの一部にも起こりうるかという、新たな研究対象を開拓した。さらにこの結果を受けて、これまでに知られている多くの因子を包含する新たな因子を定義し、グラフがこの因子をもつための必要十分条件を得ることができた。これらにより、本研究課題を部分的に解決している。

以上をもとに、平成 27 年度は次のような計画で研究を進めていった。

(1) 平成 27 年度の早い時期に、すでに知られている因子に関する結果を MathSciNet やグラフ理論関係図書により、多角的に調査、検討した。この調査・検討では、グラフ全体に存在する構造を部分にも見出すという観点と次年度以降に取り組み課題である全域木へ発展させるという観点から取り組んだ。

(2) 十分な調査、検討をしたのち、遅くとも平成 27 年度後半には、証明に取り組んだ。

(3) 得られた結果を論文としてまとめるとともに、学会、研究集会等で順次口頭発表した。

平成 28 年度以降の研究計画

因子に連結性を付加し、既存の結果を拡張した。特に、各点から出る辺の本数を制限した全域木について、グラフの因子理論の観点から、その存在条件について検討した。既存の因子に対して

は、これまで多くの研究がなされているが、そのほとんどが連結性を問われていない因子に関するものであった。これに対し、最近の私の研究では、ハミルトン閉路を含む連結な因子を定義し、グラフがこの因子をもつための十分条件を得ている。連結な因子は、ハミルトン閉路を拡張した概念とみなすこともでき、数学的意義のみならず、工学での応用も期待される。しかしながら、与えられたグラフにおいて所望の連結な因子があるか否かという問題は一般に、計算機分野において NP 困難のクラスに属し、数学的に必要十分条件を求めるのは極めて困難とされている。このため、本研究では連結な因子の基本的構造である全域木に焦点をあて、グラフが所望の全域木をもつための十分条件を求めた。具体的な計画は以下のとおりである。

(1) まずは平成 27 年度前半において、既存の結果を十分に調査、検討した。グラフの因子そのものに関する結果の調査、検討については、平成 27 年度の計画に含まれているので、平成 27 年度の早い段階で、ハミルトン閉路と木に関する結果に集中して調査した。

(2) この調査を受けて、平成 28 年度後半以降では、因子の結果とハミルトン閉路または木の結果とを比較検討し、これらを自然に融合した全域木の存在証明について取り組んだ。

(3) 得られた結果を論文としてまとめるとともに、学会、研究集会等で順次口頭発表した。

4. 研究成果

(1) 研究分担者の松原良太氏と大学院生の松尾菜南氏との共同研究で、平曲面上に $[a, b]$ -因子が存在するための十分条件を得ることができた。研究実績の概要で挙げた本研究の目的(1)において、今年度は共同研究により、 $[a, b]$ -因子というグラフの内部構造について、研究成果が得られた。これはこれまで、本研究で対象としていなかった平曲面上のグラフに関する結果であり、新たな視点によって得られた先駆的な研究としての重要な意義があると考えられる。一方で、この目的(1)では、この結果にとどまらず、より研究を進めていく必要があるとも考えている。

(2) 研究分担者の松原良太氏と茨城大学の松村初氏との共同研究により、グラフの k -spider という概念を導入し、与えられたグラフにおいて、全域 k -spider が存在するための十分条件を得ることができた。本研究においては、グラフの k -spider という概念を導入した。 k -spider とは、1 点のみが次数 2 以上 k 以下であり、その他の点の次数が 2 以下である木をいう。与えられたグラフ G において、隣接していない任意の 2 点の次数和が $|G|+k-1$ 以上ならば、グラフ G には、全域 k -spider が存在することを証明した。

(3) 古谷倫貴氏、前澤俊一氏、松原良太氏（研究分担者）、土屋翔一氏、八島高将氏との共同研究により、スターフリーグラフに、全域 k -tree が存在するための十分条件を得ることができた。さらに、前澤俊一氏、松原良太氏（研究分担者）との共同研究により、分岐点と葉の合計数が少ない全域木が存在するための十分条件も得た。本研究においては、与えられたグラフを対象に、特定の性質を満たす木が存在するための十分条件について研究し、特に、グラフの「全域 k -tree」と「分岐点と葉の合計数が少ない全域木」という 2 つの概念について、それぞれが存在するための次数条件を求めることができた。なお、グラフの全域 k -tree とは、グラフの各点から出る辺の本数が 1 以上 k 以下の木をいう。

(4) 松原良太氏（研究分担者）、松村初氏との共同研究において、 k -spider という、新たな概念を定義し、これに関する結果を得た。これは 1 つの避難所から交差点がない経路が複数存在するかを考慮する概念であり、今後、応用が期待できると考えている。本研究においては、与えられたグラフを対象に、特定の性質を満たす木が存在するための十分条件について研究し、特に、グラフの「 k -spider」という新たな概念を定義し、グラフに全域 k -spider が存在するための次数条件を求めることができた。なお、グラフの k -spider とは、グラフの 1 点から、放射状に高々 k 本の道が伸びていく経路をいう。

(5) 研究分担者の松原良太氏らとの共同研究において、分岐が少ないグラフの木に関する結果を得ることができた。前年度の研究では、 k -spider という、新たな概念を定義し、これに関する結果を得た。これをさらに拡張させ、分岐点と葉の合計数が少ない全域木が存在するための十分条件を得た。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 S.Maezawa, R. Matsubara and H.Matsuda	4. 巻 35
2. 論文標題 Degree conditions for graphs to have spanning trees with few branch vertices and leaves.	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Graphs and Combinatorics	6. 最初と最後の頁 231-238
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1007/s00373-018-1998-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 R. Matsubara, H.Matsuda, N.Matsuo, K.Noguchi and K.Ozeki	4. 巻 342
2. 論文標題 [a,b]-factors of graphs on surfaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 1979-1988
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） https://doi.org/10.1016/j.disc.2019.03.016	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Ryota Matsubara, Haruhide Matsuda, Hajime Matsumura	4. 巻 136
2. 論文標題 A spanning k-spider in a graph	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Ars Combinatoria	6. 最初と最後の頁 247-253
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計16件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 4件）

1. 発表者名 松田晴英
2. 発表標題 奇次数因子の因子臨界による必要十分条件
3. 学会等名 2019年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松田晴英
2. 発表標題 グラフに全域k-treeが存在するための次数条件について
3. 学会等名 離散数学とその応用研究集会 2018
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 前澤俊一
2. 発表標題 Min-max theorem for an f-leaf-tree
3. 学会等名 The 30th Workshop on Topological Graph Theory
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松田晴英
2. 発表標題 Berge-Tutte-type formula for maximum trees with constraints on the leaf degree
3. 学会等名 The fourth Japan-Sino Symposium on Graph Theory, Combinatorics and Their Applications (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 前澤俊一, 松原良太, 松田晴英
2. 発表標題 Degree condition for the existence of a spanning tree with few branch vertices and leaves
3. 学会等名 離散数学とその応用研究集会2017
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 前澤俊一, 松原良太, 松田晴英
2. 発表標題 Fan-type condition for a graph to be k-leaf-connected
3. 学会等名 第28回位相幾何学的グラフ理論研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 古谷倫貴, 前澤俊一, 松原良太, 松田晴英, 土屋翔一, 八島高将
2. 発表標題 Degree conditions for existence of spanning k-trees in star-free graphs
3. 学会等名 2017年度応用数学合同研究集会
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 前澤俊一, 松原良太, 松田晴英
2. 発表標題 いくつかの中継点を經由する経路問題
3. 学会等名 離散数学とその応用研究集会2016
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 前澤俊一, 松原良太, 松田晴英
2. 発表標題 Fan-type condition for a graph to be k-leaf-connected
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Shun-ichi Maezawa, Ryota Matsubara, Haruhide Matsuda
2. 発表標題 Fan-type condition for a graph to be k-leaf-connected
3. 学会等名 The Third Sino-Japan symposium on Graph Theory, Combinatorics and their Applications (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Shun-ichi Maezawa, Ryota Matsubara, Haruhide Matsuda
2. 発表標題 On a spanning k-tree in which specified vertices have degree at most f
3. 学会等名 The Third Sino-Japan symposium on Graph Theory, Combinatorics and their Applications (国際学会)
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 松田晴英
2. 発表標題 [a, b]-factors of graphs on surfaces
3. 学会等名 第28回位相幾何学のグラフ理論研究集会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 松原良太、松田晴英、松尾菜南、野口健太、小関健太
2. 発表標題 [a, b]-factors of graphs on surfaces
3. 学会等名 応用数学合同研究集会
4. 発表年 2016年

1. 発表者名 Haruhide Matsuda
2. 発表標題 On degree-bounded trees in graph theory
3. 学会等名 The 1st UOG-SIT Mathematics and Computer Science Research Workshop (国際学会)
4. 発表年 2017年

1. 発表者名 松尾菜南, 松原良太, 松田晴英, 野口健太
2. 発表標題 [a,b]-Factors of Graphs on Surfaces
3. 学会等名 離散数学とその応用研究集会2015
4. 発表年 2015年

1. 発表者名 松田晴英
2. 発表標題 グラフの木から連結因子へ
3. 学会等名 日本数学会2015年度秋季総合分科会 (招待講演)
4. 発表年 2015年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

Haruhide Matsuda's Website http://www.sic.shibaura-it.ac.jp/~hmatsuda/

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	松原 良太 (Matsubara Ryota) (70581685)	芝浦工業大学・工学部・准教授 (32619)	