様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月　 ３ 日現在

機関番号：３３９１０
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2015～2017
課題番号：１５Ｋ０４９８６

研究課題名（和文）エントロピー圧縮による力学系・流体力学の新しい解析手法の開発

研究課題名（英文）Applications of entropy compression algorithms to dynamical systems and fluid mechanics

研究代表者
荒井　迅（ARAI, Zin）

中部大学・創発学術院・教授

研究者番号：８０３６２４３２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：本研究では，近年盛んになっている有向グラフによる離散化を用いた力学系や流体力学の研究に，簡潔データ構造などの情報理論の成果を導入し，このような離散化の応用範囲を拡大するアルゴリズムを開発した．データを圧縮したままで力学系の構造を計算することにより，これまではメモリの制限により不可能であった，より現実的かつ高次元の問題へのアプローチが可能になった．
また，系の離散表現の難しさを情報エントロピーという指標で表すことで，力学系や流体の複雑さと情報量の相関，特に位相的エントロピーと情報エントロピーの関係についての新しい知見を得ることもできた．

研究成果の概要（英文）：Using recent information theoretic methods such as the succinct data structure, we have developed some algorithms for improving the computational capability of graph theoretical methods in dynamical systems and fluid mechanics. These algorithms enable us to use compressed and memory-efficient data structures for computing the structure of the invariant sets of dynamical systems so that we can handle more practical and higher dimensional problems.
We also studied the relation between the information theoretic invariants and topological invariants of the system. In particular, we have shown that, for some dynamical systems, there is an explicit relation between the information theoretic entropy of the data required for the graph representation of the system and the topological entropy of the system.

研究分野：数学

キーワード：力学系　アルゴリズム　数値解析　数理モデル

１．研究開始当初の背景

力学系の研究において，力学系の情報をいったん有向グラフで表現したうえで，グラフ理論のアルゴリズムを用いた解析を適用する手法が近年盛んに用いられるようになっている．これにより，局所的な構造だけでなく，ホモクリニック構造などの大域的な情報を効率よく，またほぼ自動的に研究することが出来るようになった．同様の手法は力学系だけでなく，流体力学などの関連する分野における数値計算結果の解析など，幅広い応用が見い出されている．

しかし，このような研究において問題になるのは，グラフの大きさである．細かい構造を見たい，またより高い次元の問題を扱いたいといった要望のもとではグラフが自然と巨大なものとなる．実際的な制限としては，コンピュータのメモリ上に保存できない大きさのグラフを用いた計算は困難であり，そのためアルゴリズムを実用的な問題に対して適用するのは困難な状況となっていた．

２．研究の目的

そこで，本研究では力学系のグラフ構造を効率良くメモリ上にコーディングし，従来の手法が適用できなかったような困難な問題を解決できるようなアルゴリズムの開発を第一の目標とした．

また，グラフの大きさによる計算の困難を定式化し，系の持つ力学系としての性質と比較することで，情報理論的な観点を用いた力学系の新しい研究方向を提示することも目標とした．

３．研究の方法

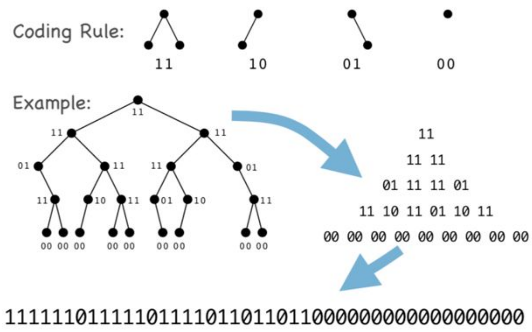
まず本研究の根幹をなすのは，情報科学において開発された最新のアルゴリズムをより力学系に適したかたちに改良し，力学系の大域的な計算アルゴリズムと融合させることである．

計算の困難さの情報理論的な評価と，力学系の持つ性質との関係の研究においては，一般形な力学系を対象とするのは最初の段階では非常に困難なため，まずは１次元のロジスティック写像や，２次元のヘノン写像など，力学系としての性質が比較的良くわかっている写像を足掛かりに研究を進める．

４．研究成果

(1) 本研究では，まず簡潔データ構造（succinct data structure）というデータ構造を用いて二分木を表現するアルゴリズムを力学系の研究に導入し，これにより力学系の大域的な計算にかかるメモリを大幅に削減することに成功した．ここで二分木は，相空間の構造を表現し，また調べたい力学系としての構造を探索するために用いられる．大域的な力学系の計算において，その半分以上の計算時間は二分木の探索にあてられるため，応用面では極めて重要である．

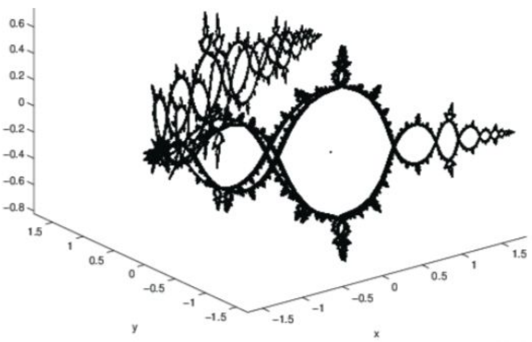
簡潔データ構造においては，通常はポインタで表現される二分木の構造を，ノードが子を持つかどうかだけを２ビットで表現したビット列で表現する（次図）．



力学系の位相的な大域計算においては，各ノードに対する計算で用いる情報はノードの幾何学的な位置だけであり，その情報はノードに持たせなくても二分木の traverse 中に逐次計算できる．従ってノードには特別な情報を持たせる必要がなく，簡潔データ構造を用いればノードあたりわずか２ビットで計算が行なえる．

また，各ノードから出るエッジの情報を一度にメモリに保存することは巨大なグラフの場合は不可能なので，用いるアルゴリズムに応じて必要なエッジ情報だけを力学系から定義抽出するアルゴリズムを開発した．

これらの成果により，計算に用いられるメモリの量は従来の標準的な実装である Global Analysis of Invariant Objects（GAIO）に対して，約 1/50 から 1/100 という劇的な圧縮を達成した．二分木の探索は従来のポインタを用いたアルゴリズムよりも遅くなってしまうが，簡潔データ構造の rank/select 法などを工夫することによって，速度低下は最大で 6 倍程度に抑えることができた．メモリに入らない問題を，外部記憶装置を用いて計算する場合の速度低下は数百から数千倍であることを考慮すると，本研究のアルゴリズムは高い実用性をもつといえる．

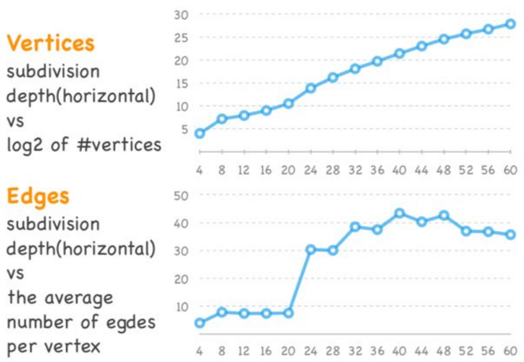


たとえば上の図は，複素エノン写像の a = 0.15，c = -1.1875 というパラメータにおけるジュリア集合の図であるが，本研究のアルゴリズムを用いることにより，この集合が一

様双曲的な構造を持つことが示された．通常の１次元複素力学系で現われるような連続的なフラクタル構造と，カントール集合のような離散的なフラクタル構造の直積に近い構造を局所的に持っているため，非常に複雑な幾何学的構造を持つ集合である．エノン写像のジュリア集合自体は複素２次元の空間，実次元でいえば４次元の空間で定義されているが（図はその 3 次元射影），一様双曲性を示すためには接バンドル上で微分の計算を行なう必要があり，そのため計算は実次元で 8 次元という高い次元で行なう．計算には 10 億個程度のノード数のグラフが必要となり，本研究の成果を用いないと大域的な計算を現実的な時間で実行することはほぼ不可能であるといえる．そのため，このような連続構造と離散構造が同居するジュリア集合で数値的に一様双曲性が示されたのはこれが初めてのことと思われる．

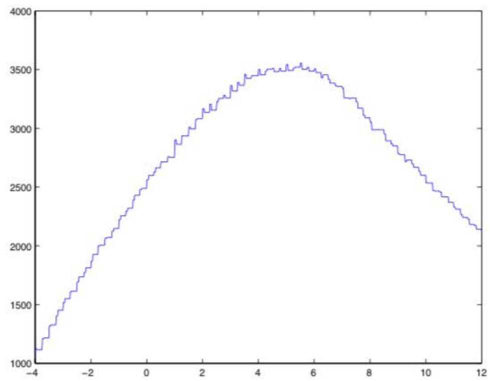
これらの研究で圧縮に関しては一定の成果を得たが，さらなる高い圧縮率の達成や高速化を目指した研究も引き続き行なう予定である．そのためには，ZDD などのより先端的なアルゴリズムを導入し，さらに力学系の構造を用いた最適化を行なう必要があると予想される．

(2) どのような力学系に対して，計算の困難が生じるかという問題は，実際的にもまた理論的にも重要な問題である．本研究でも課題のひとつとして，グラフの大きさと，調べたい集合の幾何学的・力学系的な性質との関係を評価した．具体的には，計算に用いるグラフのノード数は，集合のフラクタル次元（ボックス次元）と関係があり，またグラフのノード当たりの平均エッジ数は，力学系の持つ正のリアプノフ指数と関係することが本研究によりわかった．



上図は具体的な例において，横軸を相空間の離散化における分割の細かさにとり，縦軸をノード（頂点）数およびノード当たりのエッジ数の log として得たグラフである．図からもわかるように，頂点数は指数的に増大しているが，これはノード数がボックス次元と関係していることから自然に予想されることである．またノード当たりのエッジ数はほぼ定数となっているが，これもエッジ数がリアプノフ数という力学系自体で決まる定数から評価される事と整合している．

(3) 力学系がそれ自身として持つ複雑さと，力学系の有向グラフ表現の情報理論的な複雑さの間には何らかの関係があると予想できるが，その関係は一般に線形なものではない．



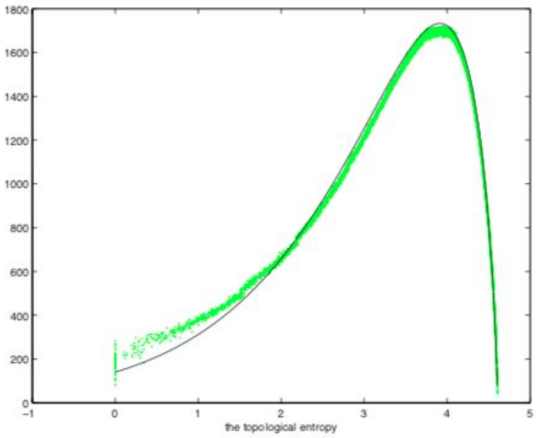
例えば，上図は実エノン写像で，ヤコビアンに相当するパラメータを１に固定した（面積保存ハミルトン系となる）族において，もうひとつの非線形性を統御するパラメータを横軸に，縦軸は最大不変集合を記述するのに用いた有向グラフの情報エントロピーとしたグラフである．おおまかに言うと横軸は力学系の位相的エントロピーと対応している．図から，情報エントロピーが最大となるのは，位相的エントロピーが最大のパラメータではなく，ちょうど中間的な値をとるときであることがわかる．横軸の値が小さいときは，系の最大不変集合は空集合となり，また値が大きいときにはスメールの馬蹄形写像となる．そのため，系が可積分に近いとき，また逆に綺麗にカオス的になる（McKay らの用語を用いれば反可積分極限）ときには情報エントロピーが低く，その中間のある意味で「綺麗でない」カオスのときに情報エントロピーが高いという解釈もできる．

本研究では，このような傾向がどの程度まで一般に成立するかを数値的に検証するとともに，理論的に検証可能な記号力学系の場合に情報エントロピーと位相的エントロピーの厳密な関係を示した．

数値的には，実および複素エノン写像を例とした研究を進めた．実エノン写像においては，ほぼ上記のような傾向が成立するが，その成立具合はパラメータにより，特に向きを反転させる写像になる場合にはさらに複雑な相関を示すこともわかった．分岐との関係も含めて，このような違いの起きる原因は今後の研究課題となる．いっぽう，複素エノン写像の場合には，位相的エントロピーがパラメータによらず定数であるが，当然のことながらグラフの情報エントロピーは定数にならない．系がカントール集合になるときは情報エントロピーが低く，KAM トーラス状の構

造を持つときには高いという傾向は実エノン写像と同様に見受けられ，このことから位相的エントロピーとは独立な新しい指標として情報エントロピーが用いることができる可能性が示唆された．情報エントロピーから離散化の手法に依存する不定性を除いて，系の不変量を実際に構成することが今後の課題である．

また，系が記号力学系という組合せ的に定義された力学系と位相同型になる場合には，厳密に位相的エントロピーと情報エントロピーの間にある関係が成立することも示した．



上の図は，記号力学系を定義する行列を0-1 のビット列だと思ったときの情報エントロピーを縦軸に，その記号力学系の位相的エントロピーを横軸にとった図である．ランダムに生成した記号力学系に対するデータが緑の点でプロットされており，いっぽう，本研究で求めた理論的な相関関数が黒の実線で示されている．図に示されているように，ランダムに生成したサンプルデータは綺麗に理論曲線に乗っており，理論の正当性がデータからも確認された．グラフの左側でデータと理論曲線に多少のずれが生じているが，これは縦軸の情報エントロピーの計算にはハフマン符号化による圧縮されたデータのサイズを用いており，そのため位相的エントロピーの低い領域で符号化のオーバーヘッドが生じているためである．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 2 件）

① Zin Arai and Yutaka Ishii, On parameter loci of the Hénon family, to appear in Communication in Mathematical Physics, 査読有．

② Zin Arai, On loops in the hyperbolic locus of the complex Hénon map and their monodromies, Physica D 334 (2016), 133-140, 査読有．

〔学会発表〕（計 13 件）

① 荒井迅，複素からみた分岐理論，Interaction between pure and applied mathamtics, 2017.

② Zin Arai, On computation of the monodromy of the Hénon map and its applications, Foundations of Computational Mathematics, 2017.

③ Zin Arai, The Conley index for real and complex Hénon maps, 力学系-理論と応用の連携探索，2017．

④ Zin Arai, The Conley index for real and complex dynamical systems, 冬の力学系研究集会，2017．

⑤ Zin Arai, On topological tools for network analysis, 情報セキュリティにおける数学的方法とその実践，2016．

⑥ 荒井迅，複素から見た分岐理論，芝浦数理談話会，2016．

⑦ Zin Arai, An introduction to topological data analysis, 4th International Symposium on ALP, 2016.

⑧ Zin Arai, On rigorous verification of the crossed mapping condition, Computation in Dynamics, 2016

⑨ 荒井迅，複素エノン写像に対する計算機援用証明について，力学系と計算，2016．

⑩ Zin Arai, On combinatorial methods for dynamical systems and fluid mechanics, 16th RIES-Hokudai International Symposium, 2015.

⑪ 荒井迅，複素力学系のモノドロミー，解析学の耳袋，2015

⑫ 荒井迅，力学系的・組み合わせ的な手法による流れの分解について，流体力学系年会，2015．

⑬ Zin Arai, Rigorous verification of the crossed mapping condition for holomorphic dynamical systems, Theory and Practice of Real Computation, 2015.

〔その他〕

ホームページ等

http://www.isc.chubu.ac.jp/zin_arai/

６．研究組織

(1)研究代表者

荒井　迅　（ARAI, Zin）

中部大学・創発学術院・教授

研究者番号：80362432