

平成 30 年 4 月 24 日現在

機関番号：11501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2017

課題番号：15K04987

研究課題名(和文) 走性現象の数値モデルの高精度数値解法の開発とその数値解析

研究課題名(英文) Higher Order Numerical Methods and Their Numerical Analysis for Mathematical Models of Taxis Phenomena

研究代表者

方 青 (FANG, Qing)

山形大学・理学部・教授

研究者番号：10243544

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：物理学、化学、生物学等の自然科学分野でよく現れる走性現象を調べるために非線形放物型偏微分方程式系で記述される走化性数値モデルが提出されている。解析解が一般に存在しないため、高精度の数値解を求めることが各分野の発展にも極めて重要な研究テーマである。本研究では、研究代表者は研究協力者たちの協力で、無限領域におけるKeller-Segel型非線形放物型偏微分方程式系に対して、有限領域における近似的な非線形問題を導出する結果を得て爆発解の有効な数値解を求める方法を開発した。さらに、特異性の解を持つ楕円型偏微分方程式の高精度数値解法と孤立波の数値シミュレーションについても研究成果を得た。

研究成果の概要(英文)： Nonlinear parabolic partial differential equations are used in mathematical models to describe taxis phenomena arising from physics, chemistry, biology and other fields of natural sciences. Since analytic solutions can not be obtained in general, it is an important research theme to get highly accurate numerical solutions which contribute to the development of those fields of natural sciences. In this research project, the representative investigates Keller-Segel type problems on unbounded domains and, by successfully obtaining the approximate problems on bounded domains, develops validate methods to solve numerically blow-up solutions. By applying the proposed numerical technique, the representative develops high order numerical methods to elliptic partial differential equations with singular solutions, and Rossby solitary waves excited by the unstable topography in weak shear flow.

研究分野：偏微分方程式の数値解析

キーワード：偏微分方程式 数値解法 高精度 有限差分法 数値解析 数値モデル

1. 研究開始当初の背景

物理学、化学、生物学等の自然現象の数理モデルの中で多くのものが偏微分方程式で記述されている。走性現象を表す数理モデルである非線形放物型偏微分方程式が反応拡散方程式とも呼ばれ、その研究は、数十年前から実際の問題との密な関連で著しく発展されてきている。このような問題の解には有限時間で存在しない爆発解がある。爆発解をもつ偏微分方程式を調べることは非常に重要な理論価値と応用価値をもつ。今まで爆発解をもつ問題に対する定性的な解析手法は非線形項の特別な形や構造を利用したのが殆どである。それでも、多くの場合に対して、具体的な爆発時間や空間爆発点の集合を確定することは困難であり、爆発時間辺りの爆発解の性質を調べることが理論的には至難の業である。しかし、自然科学の研究分野に現れた爆発解に関する問題に対して、工学の現場では、具体的な計算結果が求められている。そして、問題解決に向けたコンピュータによる有効な数値計算法が求められている。

2. 研究の目的

本研究では、無限領域における Keller-Segel 型システムを含む走性現象を表す数理モデルの高精度数値解法を開発する。このモデルは対流項をもつ反応拡散方程式の一種であり、近年数学分野や生物学分野等の研究者たちの注目を集めている。このようなタイプの偏微分方程式の解は豊富な数学構造を持ち、生物学や生態学等の自然現象を表す数理モデルだけでなく、偏微分方程式の理論解析、数値解析等の研究対象でもある。Keller-Segel 型システムを含む走性現象の数理モデルに対する定性的研究システムの特殊構造を利用して行うことができたが、一般的な場合に対しては理論的研究が難しいこととなる。そのために、有効で高精度の数値解法と対応する数値解析の評価が求められる。今までいくつかの数値解法が提案されたが、自然科学分野の科学技術計算で期待した精度にはまだ至っていない。本研究は Keller-Segel 型システムに対して有効で高精度の数値解法を開発する。また、提案する数値解法に対して収束解析と超収束解析の誤差解析を行う。さらに、ほかの特異性問題に対して得られた離散化テクニックを活用して、高精度の数値解法を開発することも行う。

3. 研究の方法

研究代表者は、研究協力者の協力を得て、偏微分方程式、数値解析およびその関連分野である関数解析、数値線形代数、数値シミュレーションなどの知識を駆使して、今まで得られた研究成果を活用して、走性現象を表す

数理モデルの爆発解の問題には新しい手法を開発し、高精度のコンパクト有限差分数値スキームを提案する。研究代表者は、無限領域における走性現象の反応拡散方程式系に対して有限領域における近似的な問題を導入し、高精度の数値解法を開発する。以下の2ステップで数値離散化は行う。まず、空間変数の離散化により非線形常微分方程式系の初期値問題を導く。その次に、時間変数に対する離散化を行い、非線形常微分方程式系を数値的に解く。誤差評価の収束解析も行う。これを遂行するためには、各種国内の関連研究会に参加し、各地の専門家たちとの研究交流を行うことによって新しいアイデアを生み出す。また、より高性能なパソコンを購入し、より安定な数値線形代数のパッケージや数値計算ソフトウェアを使うことにより、新しい高精度の数値アルゴリズムを実装して検証する。また、開発した高精度の数値アルゴリズムを用いて、生態学や海洋力学などの分野に現れる数理モデルの数値的な考察を行う。

4. 研究成果

(1) 半無限区間上の Keller-Segel 型システムの爆発解の数値解法に関する研究

研究代表者は、北京林業大学の Xiao-Yu Zhang 准教授の協力を得て、自発細胞両極性の現象を記述する空間1次元の半無限区間上の移流拡散方程式の爆発解の数値スキームを構成した。細胞を球対称の形から好適な軸を持つ状態にさせるプロセスが細胞両極性と呼ばれる。走化性現象においてある化学物質の勾配が細胞の移動方向を決めると同様に、細胞両極性は、ある外部の非対称合図によって制御される。細胞両極性に関する研究でフランスの研究者たちによって提出された半無限区間上の移流拡散方程式に対して、ラプラス変換を施すことにより、局所非線形的な吸収型境界条件を得ることができた。この吸収型境界条件を用いて、有限空間上の近似境界値問題を導いた。さらに、構成した爆発解の数値スキームを用いて爆発解等の数値シミュレーションを行った。研究成果は論文としてまとめられ、学術誌 Information に発表した。(論文 [5])

(2) 特異性の解を持つ楕円型偏微分方程式の高精度数値解法に関する研究

研究代表者は、北京林業大学の Xiao-Yu Zhang 准教授と中国河海大学の Ruyun Wang 教授との共同研究で、楕円型偏微分方程式の Dirichlet 境界値問題の高精度の数値解法を開発とその数値解析の誤差評価に従事した。真の解が領域の境界でその微分係数が発散するという特異性がある問題に対して、伸長関数を使う格子点の再細分化によって

Shortley-Weller 法の高精度性を示す数値スキームの誤差評価を与えた。伸長関数のパラメータを調整することによりほぼ2次精度で真の解に収束することを証明した。これらテクニックは、自然科学の研究分野に現れた爆発解をもつ問題に関する数値スキームの構成に開発された。研究成果は論文としてまとめられ、学術誌 Numerical Functional Analysis and Optimization に発表した。(論文 [4])

(3) 捕食者被食者数理モデルのダイナミクスに関する研究数値的な考察

研究代表者は、北京林業大学の Xiao-Yu Zhang 准教授の協力を得て、被食者捕食者数理モデルのダイナミクスに対して数値的な考察をした。具体的には、Holling タイプ II の関数反応をもつ Rosenzweig-MacArthur モデルに対して、環境パラメータと狩猟パラメータの捕食者と被捕食者の相互作用への依存効果を考察した。環境収容力の減衰関数を導入して、狩猟パラメータと合わせて考えた。数値的な実験を行うことにより、Hopf 分岐のダイアグラムなどの周期的な挙動を得た。研究成果は論文としてまとめられ、学術誌 International Journal of Automation and Computing に発表した。(論文 [6])

(4) Rossby 孤立波の性質及び数値シミュレーションに関する研究

研究代表者は、中国河海大学の Ruyun Wang 教授およびその研究グループとの共同研究で、弱いシアアのある流体において、不安定な地形によって強制された Rossby 孤立波の性質とその数値シミュレーションに関する研究に従事した。強制項をもつ新しい KdV 方程式が導出され、子午波数が 1 と 2 の場合に対して生成した孤立波の進化を調べた。さらに、擬似スペクトル数値解法によって孤立波の数値シミュレーションを行った。研究成果は論文としてまとめられ、学術誌 Nonlinear Dynamics に発表した。(論文 [1])

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

[1] Bao-Jun Zhao, Ru-Yun Wang, Qing Fang, Wen-Jin Sun and Tian-Ming Zhan, Rossby solitary waves excited by the unstable topography in weak shear flow, Nonlinear Dynamics, vol. 90, Issue 2, 889-897, 2017. 査読有

[2] Ruyun Wang, Tian Wang, Xiaoyu Zhang,

Qing Fang, Chumin Wu and Bin Zhang, An Artificial Neural Network Model for Predicting Typhoon Intensity and Its Application, Communications in Computer and Information Science, vol. 763, 762-770, 2017. 査読有

[3] Ruiwen Zheng, Qing Fang, Zhiyuan Liu, Binghong Li and Xiao-Yu Zhang, A Multivariate Wind Power Fitting Model Based on Cluster Wavelet Neural Network, Communications in Computer and Information Science, vol. 763, 94-102, 2017. 査読有

[4] Xiao-Yu Zhang, Ruyun Wang and Qing Fang, Convergence Analysis of the Shortley-Weller Method on Refinement Grids for Elliptic Equations with Singularities, Numer. Funct. Anal. Optimiz., vol. 37, Issue 6, 805-822, 2016. 査読有

[5] Xiao-Yu Zhang, Ruyun Wang and Qing Fang, A Numerical Study on Blow-up Solutions of a Reaction-Diffusion Model, Information, vol. 19, 1689-1696, 2016. 査読有

[6] Xiao-Yu Zhang and Qing Fang, Numerical Evaluation of External Effects on Interspecific Interacting Populations, International Journal of Automation and Computing, vol. 13, Issue 2, 133-141, 2016. 査読有

[7] Ru-yun Wang, Yin-xian Yu, Zhen-tao Zang, Di Cao and Qing Fang, A Domain Decomposition Method Based on the AD Algorithm, Proceedings of International Conference on Mechatronics, Electronic, Industrial and Control Engineering, Advances in Engineering Research Volume 5, 1619-1624, Atlantis Press, 2015. 査読有

[学会発表] (計8件)

(1) Ruyun Wang, Tian Wang, Xiaoyu Zhang, Qing Fang, Chumin Wu and Bin Zhang, An Artificial Neural Network Model for Predicting Typhoon Intensity and Its Application, International Conference on Life System Modeling and Simulation 2017, Nanjing University of Posts and Telecommunications, September 24, 2017.

(2) Ruiwen Zheng, Qing Fang, Zhiyuan Liu, Binghong Li and Xiao-Yu Zhang, A Multivariate Wind Power Fitting Model Based on Cluster Wavelet Neural Network, International Conference on Life System Modeling and Simulation 2017, Nanjing

University of Posts and Telecommunications, September 23, 2017.

(3) Qing Fang, A Numerical Method to Blow-up Solutions of Phase Separation Models, Workshop on Numerical Analysis and Scientific Computing, Zhengzhou University, August 23, 2017.

(4) Qing Fang, Superconvergence of solution derivatives for parabolic differential equations, Workshop on Numerical Analysis and Scientific Computing, Zhengzhou University, November 11, 2016.

(5) Ruyin Wang, Zhentao Zang, Qing Fang, Jun Zhou, Dandan Qiang, Bin Zhang and Xin Zhang, A high-precision and high-resolution parallel numerical model for storm surge based on GPU, 28th International Conference on Parallel Computational Fluid Dynamics, Kobe International Conference Center, May 9, 2016.

(6) Qing Fang, Superconvergence of solution derivatives for the FDM and FEM approximation to elliptic boundary value problems, Workshop on Numerical Analysis and Scientific Computing, Beijing Forestry University, March 19, 2016.

(7) Xiao-Yu Zhang and Qing Fang, A Numerical Study on Blow-up Solutions of a Reaction-Diffusion Model, The Seventh International Conference on Information, GIS NTU Convention Center, National Taiwan University, Taipei, November 26, 2015.

(8) Qing Fang, Superconvergence of finite difference methods to linear elliptic PDEs, Joint Seminar on Numerical Analysis at Niigata University, Niigata University, September 2, 2015.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

方青 (FANG, Qing)

山形大学・理学部・教授

研究者番号: 10243544

(2) 研究協力者

張曉宇 (ZHANG, Xiao-Yu)

王如雲 (WANG, Ruyun)