

令和元年6月1日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2015～2018

課題番号：15K04999

研究課題名(和文) ボルテラ型積分変換を用いた無駄時間要素を含む発展方程式系の安定化に関する研究

研究課題名(英文) Studies on Stabilization of Evolution Equations with Time Lag Using Volterra Integral Transformation

研究代表者

佐野 英樹 (SANO, HIDEKI)

神戸大学・システム情報学研究科・教授

研究者番号：70278737

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：本研究を通して六つの成果を得ることができた。以下の通りである。(1) 分布入力/境界入力に無駄時間を有する放物型偏微分方程式系の安定化、(2) 分布観測に無駄時間を有する放物型偏微分方程式系に対する状態推定、(3) 境界入力に無駄時間を有する双曲型偏微分方程式系の安定化、(4) 非局所境界条件に無駄時間を有する双曲型偏微分方程式系に対する状態推定、(5) 境界フィードバックループに無駄時間要素を含む熱交換方程式の安定性解析、(6) 無限次元フィードバック系に対する安定半径の近似

研究成果の学術的意義や社会的意義

近年、コンピュータネットワークを介した制御系構築の際に、信号の遅延が制御系の安定性に深刻な影響を及ぼす新たな問題が生じてきた。本研究では、主に、入力無駄時間を考慮した分布定数系の安定化問題を取り上げた。入力無駄時間が存在している下でも、分布定数系の安定化が達成できるような、実装可能な制御則を構成したが、その成果は、半群理論とボルテラ型の積分変換に基づきコントローラ設計法を与えるという学術的な意味をもち、また、分布定数系を遠隔操作するという工学的応用を視野に入れたものになっている。

研究成果の概要(英文)：Through this study, six results were obtained. They are summarized as follows: (1) Stabilization of parabolic distributed parameter systems with input delay under distributed/boundary control; (2) State estimation for parabolic distributed parameter systems with measurement delay under distributed observation; (3) Stabilization of hyperbolic distributed parameter systems with input delay under boundary control; (4) State estimation for a hyperbolic distributed parameter system with time lag in nonlocal boundary condition; (5) Stability analysis of heat exchangers with delayed boundary feedback; (6) Approximation of stability radius for an infinite-dimensional feedback control system.

研究分野：偏微分方程式系の制御理論

キーワード：放物型偏微分方程式系 双曲型偏微分方程式系 無駄時間 安定化 状態推定 ボルテラ型積分変換  
バックステッピング 半群

## 様式 C-19、F-19-1、Z-19、CK-19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

拡散方程式や波動方程式などのように偏微分方程式によって記述されるシステムは分布定数系と呼ばれ、その安定性解析や安定化問題は、主として半群理論を中心とする関数解析学の枠組みの中で研究されてきた。現在では、その理論体系はかなり整備され、熱交換器の温度制御や柔軟構造物の制振制御などへの応用研究がなされている。一方、近年の情報化社会では、コンピュータネットワークを介してシステムを制御しようとする動きがあるが、その際に信号の遅延の影響が無視できない状況が起こり、それに伴う安定性に関わる新たな問題が生じてきた。

その問題との関連で、近年、常微分方程式によって記述される有限次元制御対象を放物型偏微分方程式や双曲型偏微分方程式を通して遠隔操作する問題が取り上げられている。国外では、Krstic (米国)は有限次元制御対象と拡散方程式がカスケード接続された系を取り上げ、バックステッピング法というボルテラ型の積分変換による手法で、有限次元制御対象と拡散方程式の双方を、拡散方程式への境界入力を用いて安定化するための制御則を与えた (M. Krstic, *Systems Control Lett.*, Vol. 58, pp. 372-377, 2009)。さらに Krstic は、拡散方程式を波動方程式に置き換えた系も取り上げ、同様に境界入力により安定化するための制御則を示した (M. Krstic, *IEEE Trans. Automat. Control*, Vol. 54, No. 6, pp. 1362-1368, 2009)。しかしながら、それらの制御系は有限次元制御対象と拡散方程式/波動方程式の状態変数をフィードバックする構造をしており、理論的には無限個の点センサが必要になるため、現実的ではない。一方、佐野 (神戸大)はその問題点に着目し、放物型偏微分方程式を介する場合に対して、少ない個数の点センサと有限次元制御則を用いてシステム全体を安定化する手法を半群理論を用いて与えた (佐野英樹, 計測自動制御学会論文集, Vol. 48, No. 4, pp. 185-192, 2012) (H. Sano, *Proc. of the 2014 Int. Conf. on Mathematics and Computers in Sciences and Industry*, pp. 261-266, 2014)。放物型偏微分方程式の部分のみに着目していえば、空間領域が2次元以上の場合には境界制御・境界観測を伴う系は、作用素の分数冪を用いた変数変換とグリーン公式によって非有界出力作用素をもつ発展方程式系に変換できることが、南部 (神戸大)によって30年以上前に示されたことであるが (T. Nambu, *Funkcialaj Ekvacioj, Serio Internacia*, Vol. 28, pp. 267-298, 1985)、最近、佐野 (神戸大)によって空間領域が1次元の場合においても、非有界出力作用素を有する発展方程式系に変換できることが示された (H. Sano, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 377, pp. 807-816, 2011) (H. Sano, *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 388, pp. 1194-1204, 2012)。そして、その結果を用いて、境界制御・境界観測をもつ放物型偏微分方程式に有限次元制御対象がカスケード接続された系に対し、ノイマン入力とディリクレ入力のそれぞれの場合に分けて、有限次元安定化コントローラの構成法が与えられていた。

### 2. 研究の目的

本研究では、放物型偏微分方程式や双曲型偏微分方程式によって記述される制御対象を、コンピュータネットワークを介して遠隔制御するという前提でモデル化し安定化問題を考察する。とりわけ、最も基本的な入力無駄時間を考慮した分布定数系の安定化制御問題を取り上げる。目的は、入力無駄時間が存在している下でも、分布定数系の安定化が達成できるような、実装可能な制御則を構成することである。この入力無駄時間を考慮した分布定数系の無駄時間要素は1階双曲型方程式である移流方程式で表現することができるので、分布定数系の制御対象を、移流方程式という分布定数系を介して制御する問題に帰着できる。途中の経路が分布定数系ではあるが、制御対象が有限次元系であった先の Krstic や佐野の研究に比べて、制御系の構成は複雑になるため、本研究では両者の手法を組み合わせる必要がある。このように本研究は、半群理論とボルテラ型の積分変換を用いて安定化のためのコントローラ設計法を与えるという学術的な意味をもち、また、分布定数系を遠隔操作するという工学的応用を視野に入れている。

上述したように、入力無駄時間をもつ分布定数系の制御問題は、無限次元制御対象を移流方程式を介して制御する問題に帰着できるが、その場合、移流方程式の空間領域は1次元の場合のみを考えればよい。最近、佐野は空間領域が1次元の場合に、ノイマン/ディリクレ境界制御・境界観測を伴う移流拡散方程式系が非有界出力作用素を有する発展方程式系に変換できることを示し、さらに有限次元安定化コントローラの構成法を与えた (H. Sano, 2011; H. Sano, 2012)。しかしながら、本研究では移流方程式を介しての制御となるので、その結果をそのまま発展させることはできない。一方、入力無駄時間をもつ集中定数系を制御する場合には、有限次元制御対象を移流方程式を介して制御することになるが、これについての安定化手法は、Krstic らによって既に与えられている (M. Krstic & A. Smyshlyaev, *Systems Control Lett.*, Vol. 57, pp. 750-758, 2008)。そのため、本研究ではまずはその手法を拡張することを試みる。Krstic はバックステッピング法というボルテラ型の積分変換による手法を用い、元のシステムを漸近安定なターゲットシステムに写すように、積分核ならびに制御則を決めている。漸近安定なターゲットシステムを構成するためには、有限次元系の可制御性に関連した極配置や最適レギュレータなどの既存結果を適用すればよいが、制御対象が無限次元系になると半群理論を用いて議論する必要がある。本研究では、はじめに分布定数系の制御対象が分布入力をもつ場合を取り上げる。つぎに、分布定数系の制御対象が境界入力をもつ場合を考えるが、これについては佐野の先の結果 (H. Sano, 2011; H. Sano, 2012)を用いることになる。なお、以上のプロセスの中で半群理論を用いて構築するターゲットシステムは無限次元系になり、したがって

制御則も無限次元系になる。そのため、何らかの近似法を用いて有限次元化する必要がある。

### 3. 研究の方法

はじめに、分布制御の下で入力無駄時間をもつ放物型偏微分方程式系を取り上げ、それに対して、Krstic による有限次元入力無駄時間システムに対する結果を拡張した方法で安定化コントローラを構成する。具体的には、つぎの 1), 2) のステップで研究を進める。1) はじめに、分布制御の下で入力無駄時間をもつ放物型偏微分方程式系を、正規化された区間幅をもつ領域上で定義され、無駄時間の逆数の速度を有する、境界入力を伴う移流方程式と、放物型偏微分方程式がカスケード接続された形に等価的に表現する。2) この境界入力を有するカスケードシステムが、ボルテラ型の積分変換によって、漸近安定な移流方程式と漸近安定な放物型方程式からなるターゲットシステムに写るように積分核ならびに制御則を決定する。ここで、ターゲットシステムとなる放物型方程式は、佐野の最近の結果 (H. Sano, *Advances in Differential Equations and Control Processes*, Vol. 14, No. 1, pp. 55–70, 2014) と同様にスペクトル解析を行い、フィードバックゲインを決める。

つぎに、ノイマン/ディリクレ境界制御の下で入力無駄時間をもつ放物型偏微分方程式系を取り上げる。これについては佐野の先の結果 (H. Sano, 2011; H. Sano, 2012) を用いて、有界入力作用素を有する入力無駄時間システムとして定式化できる。したがって、基本的に分布入力のとくと同様のステップで研究を進めていくことができるが、分数冪を用いた変数変換を行うため、強いノルムでの収束を示さなければならない。さらに、境界制御の下で入力無駄時間をもつ双曲型偏微分方程式系に対して安定化コントローラ構成に関する研究を進める。

Krstic はディリクレ境界入力に無駄時間要素を含む熱拡散系に対し、二種類の積分変換に基づくバックステップ法を用いて制御則を導出したが (M. Krstic, *Systems Control Lett.*, Vol. 58, pp. 773–782, 2009)、本研究では単独の積分変換に基づくバックステップ法を用いる。

### 4. 研究成果

研究期間全体を通じて「境界条件に無駄時間要素を含む放物型/双曲型分布定数系の安定化問題や状態推定問題」が主要なテーマであったが、早い段階で研究成果 [学会発表⑦⑧⑩] を得ることができた。その後、それを基にして関連する研究を同時に進めていくことができ、ポート・ハミルトニアン法を用いた、境界フィードバックループに無駄時間要素を含む熱交換方程式の安定性解析や、無限次元フィードバック系に対する安定半径の近似などの研究成果も得ることができた。以下、順に概要を述べる。

(1) 分布入力/境界入力に無駄時間を有する放物型偏微分方程式系の安定化 [雑誌論文③④; 学会発表⑤⑥⑦⑧⑩]

はじめに、入力無駄時間を有する不安定な熱拡散系の安定化問題を取り上げた。Krstic らは入力無駄時間を有する常微分方程式系に対して無駄時間要素を輸送方程式に置き換え、さらにボルテラ型積分変換を用いて predictor 型の安定化コントローラを構成したが (M. Krstic & A. Smyshlyaev, 2008)、本研究では、その手法を分布入力をもつ熱拡散系に拡張した。特に、熱拡散系を関数空間で定式化し、ターゲットシステムを構成する際に部分極配置法を用いている点、放物型方程式および双曲型方程式の解を用いて制御則を構成している点の特徴となっている。さらに、ノイマン境界入力やディリクレ境界入力に無駄時間要素を含む場合に拡張し、それぞれ predictor 型の安定化コントローラを導出した。なお、Krstic の先の結果 (M. Krstic, 2009) においては、安定化コントローラに対して predictor 型の表現は与えられていない。

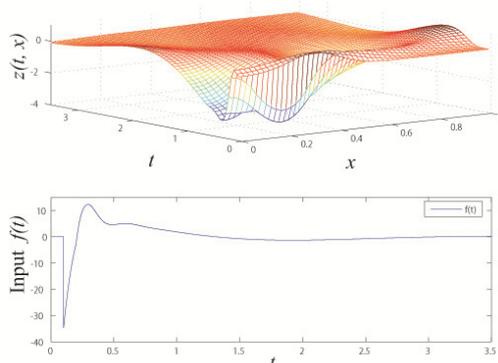


図 1 分布入力に無駄時間を有する放物型偏微分方程式系の安定化の例

つぎに、入力無駄時間を有する熱拡散系の安定化問題における制御対象を、より一般的なスツルム・リウヴィル型作用素によって記述される放物型偏微分方程式系に拡張し、分布入力や境界入力に無駄時間要素が含まれる場合に対して、それぞれ predictor 型の安定化コントローラを導出した。ここでも、放物型偏微分方程式系を関数空間で定式化し、ターゲットシステム

を構成する際に部分極配置法を用いたが、その結果、抽象的な predictor 型の安定化コントローラを、システム作用素の有限個の固有値および固有関数の情報を用いて実装可能となることが明らかになった。さらに、分布入力やノイマン境界入力のそれぞれの場合に対して数値シミュレーションを行い、predictor 型のコントローラが効果的に機能することを確認した。図 1 は分布入力の場合の数値例である。

(2) 分布観測に無駄時間を有する放物型偏微分方程式系に対する状態推定 [雑誌論文⑦]

観測出力に無駄時間を伴う放物型偏微分方程式系に対するオブザーバ設計問題を扱った。この場合も一般的なスツルム・リウヴィル型作用素で記述される系を対象とした。特に、このシステムを放物型方程式と輸送方程式がカスケード接続された形で表し、偏微分方程式のバックステップ法および半群理論を用いることにより、オブザーバゲインが設計できることを示した。重要なポイントは、設計手順の一つのステップとして現れる放物型方程式の独立変数の一つを時間変数とみなしたとき、初期値問題を逆方向に解くことを可能にするために、終端条件に含まれるセンサの影響関数に対して、ある種の滑らかさに関する仮定を課したことである。なお、放物型偏微分方程式系は一般に逆問題を解くのが難しいが、本研究で得た理論的な結果はその事実と矛盾しない。

(3) 境界入力に無駄時間を有する双曲型偏微分方程式系の安定化 [雑誌論文①;学会発表②]

(1)の研究で扱った、分布入力/境界入力に無駄時間要素を含む放物型偏微分方程式系の安定化問題における制御対象を、ボルテラ型積分項を有する双曲型偏微分方程式系に置き換え、境界入力に無駄時間要素が含まれる場合に対して、半群理論を用いて predictor 型の安定化コントローラを導出した。その際に、元のシステムをターゲットシステムへ写すボルテラ・フレドホルム型積分変換が左可逆となるが、右可逆とはならないという性質を有することが明らかになった。さらに、数値シミュレーションを行い、predictor 型のコントローラが効果的に機能することを確認した。図 2 はその数値例である。

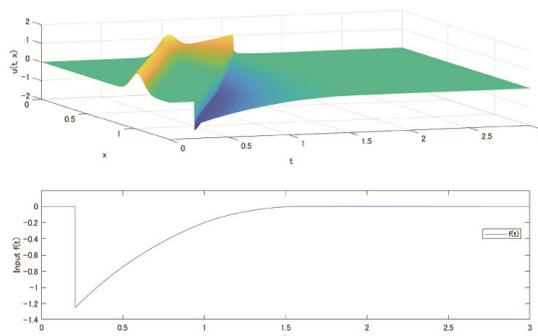


図 2 境界入力に無駄時間を有する双曲型偏微分方程式系の安定化の例

(4) 非局所境界条件に無駄時間を有する双曲型偏微分方程式系に対する状態推定 [雑誌論文②;学会発表①③④]

非局所境界条件に無駄時間を含む双曲型偏微分方程式系に対するオブザーバ設計問題を扱った。このシステムは潜伏期間を有する Kermack-McKendrick モデルと解釈できる。このシステムに含まれる無駄時間要素を輸送方程式を用いて等価的に表し、偏微分方程式のバックステップ法により、オブザーバゲインが設計できることを示した。また、誤差システムの古典解が有限時間でゼロになることを特性曲線法を用いて示し、さらに半群理論を用いて誤差システムの軟解が同様に有限時間でゼロになることを示した。

(5) 境界フィードバックループに無駄時間要素を含む熱交換方程式の安定性解析 [雑誌論文⑩;学会発表⑪]

境界フィードバックループに無駄時間要素を含む 1 階双曲型方程式系を取り上げ、ポート・ハミルトニアン法を用いて閉ループ系の指数安定性が保証される無駄時間の大きさについて考察した。この偏微分方程式系は向流型熱交換器のモデルとなるものであるが、元々、ループに無駄時間要素が含まれない場合は、国松・佐野 (N. Kunimatsu & H. Sano, IMA J. Math. Control & Information, Vol. 15, pp. 317-330, 1998) において、Huang の結果 (F.L. Huang, Ann. Differential Equations, Vol. 1, No. 1, pp. 43-56, 1985) を用いて安定性解析がなされていた。ただし、同手法を用いた解析は特性方程式が複雑になるため、フィードバックゲインが特別な値をもつ場合に限られていた。その後、Villegas らによってポート・ハミルトニアン法に関する研究が進められ、ゲインに関する制約が緩和された (J.A. Villegas, H. Zwart, Y. Le Gorrec, B. Maschke, IEEE Trans. Automat. Control, Vol. 54, No. 1, pp. 142-147, 2009)。本研究では、ループに含まれる無駄時間要素を輸送方程式で表し、系全体を拡大 1 階双曲型方程式系で表すことにより、Villegas らの手法を用いることができ、指数安定性を保証する無駄

時間の大きさが評価できた。さらに、並流型熱交換器を表す1階双曲型方程式系の場合も同様のアプローチが適用できることを示した。

(6) 無限次元フィードバック系に対する安定半径の近似 [雑誌論文⑤⑨;学会発表⑨⑬]

無限次元動的システムに対して有限次元安定化コントローラを設計する際に現れる安定半径の近似問題を取り上げた。安定半径の計算には、実現がヒルベルト空間における無限次元作用素によって記述される伝達関数の $H_\infty$ の値が必要になる。実用的な観点から、無限次元作用素を近似する有限次元作用素の族を用意し、それらの伝達関数の $H_\infty$ ノルムを計算する必要がある。しかしながら、それらが元の伝達関数の $H_\infty$ ノルムの値に収束するという保証はない。本研究では、その収束の正当性を示した。

## 5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 11件)

- ① H. Sano and M. Wakaiki, Boundary stabilization of first-order hyperbolic equations with input delay, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 査読有, 2019, (in press)  
DOI:10.1007/s13160-019-00346-6
- ② H. Sano, M. Wakaiki, and H. Maruyama, Backstepping observers for two linearized Kermack-McKendrick models, IFAC-PapersOnLine 51-32, 査読有, 2018, pp. 456-461  
DOI:10.1016/j.ifacol.2018.11.427
- ③ H. Sano, Neumann boundary stabilization of one-dimensional linear parabolic systems with input delay, IEEE Transactions on Automatic Control, 査読有, Vol. 63, No. 9, 2018, pp. 3105-3111  
DOI:10.1109/TAC.2018.2791470
- ④ H. Sano and S. Morimoto, Predictors for linear parabolic systems with input delay, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 査読有, Vol. 35, No. 2, 2018, pp. 477-496  
DOI:10.1007/s13160-017-0286-4
- ⑤ H. Sano, Low order stabilizing controllers for a class of distributed parameter systems, Automatica, 査読有, Vol. 92, 2018, pp. 49-55  
DOI:10.1016/j.automatica.2018.02.013
- ⑥ H. Sano, Stability analysis of the telegrapher's equations with dynamic boundary condition, Systems & Control Letters, 査読有, Vol. 111, 2018, pp. 34-39  
DOI:10.1016/j.sysconle.2017.11.001
- ⑦ 佐野英樹, 観測遅れを伴う放物型分布定数系に対するオブザーバ, 計測自動制御学会論文集, 査読有, Vol. 53, No. 11, 2017, pp. 621-623
- ⑧ H. Sano, Finite-dimensional H-infinity control of a parallel-flow heat exchange process, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Technical Sciences, 査読有, Vol. 65, No. 1, 2017, pp. 11-19  
DOI:10.1515/bpasts-2017-0002
- ⑨ H. Sano, On approximation of stability radius for an infinite-dimensional feedback control system, Kybernetika, 査読有, Vol. 52, No. 5, 2016, pp. 824-835  
DOI:10.14736/kyb-2016-5-0824
- ⑩ H. Sano, Exponential stability of heat exchangers with delayed boundary feedback, IFAC-PapersOnLine 49-8, 査読有, 2016, pp. 43-47  
DOI:10.1016/j.ifacol.2016.07.416
- ⑪ H. Sano, H-infinity control of a parallel-flow heat exchange process, IFAC-PapersOnLine 48-25, 査読有, 2015, pp. 50-55  
DOI:10.1016/j.ifacol.2015.11.058

[学会発表] (計 14件)

- ① 丸山颯天, 佐野英樹, 若生将史, 非局所境界条件にむだ時間を含む1階双曲型システムに

対するオブザーバ設計と誤差システムのL2-安定性, 第6回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム, 2019.3.7, 熊本大学(熊本県)

- ② 佐野英樹, 若生将史, 境界入力に無駄時間要素を含む1階双曲型システムの安定化について, 2018年度応用数学合同研究集会, 2018.12.15, 龍谷大学(滋賀県)
- ③ H. Sano, M. Wakaiki, and H. Maruyama, Backstepping observers for two linearized Kermack-McKendrick models, The 17th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO2018), 2018.10.17, Yekaterinburg (Russia)
- ④ 丸山颯天, 佐野英樹, 若生将史, 非局所境界条件にむだ時間を含む双曲型システムに対する状態推定, 日本応用数理学会2018年年会, 2018.9.5, 名古屋大学(愛知県)
- ⑤ 佐野英樹, 入力に無駄時間要素を含む放物型システムの安定化について, 2017秋の偏微分方程式セミナー, 2017.9.6, 大阪大学(大阪府)
- ⑥ 佐野英樹, 入力無駄時間要素をもつ熱拡散系のディリクレ境界安定化, 第4回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム, 2017.3.8, 岡山大学(岡山県)
- ⑦ 佐野英樹, 境界入力に無駄時間要素を含む熱拡散系の安定化について, 2016年度応用数学合同研究集会, 2016.12.17, 龍谷大学(滋賀県)
- ⑧ 佐野英樹, 境界入力に無駄時間要素を含む熱拡散系の安定化について, 非線形現象の特徴化に基づく制御理論調査研究会第2回研究会, 2016.11.18, 大阪大学(大阪府)
- ⑨ 佐野英樹, 無限次元フィードバック系における安定半径の近似について, 第59回自動制御連合講演会, 2016.11.12, 北九州国際会議場(福岡県)
- ⑩ 森本茂樹, 佐野英樹, 入力むだ時間を有する熱拡散系の安定化, 第59回自動制御連合講演会, 2016.11.12, 北九州国際会議場(福岡県)
- ⑪ H. Sano, Exponential stability of heat exchangers with delayed boundary feedback, The 2nd IFAC Workshop on Control of Systems Governed by Partial Differential Equations (CPDE2016), 2016.6.13, Bertinoro (Italy)
- ⑫ 佐野英樹, 動的境界条件をもつ分布定数回路の安定性について, 第3回計測自動制御学会制御部門マルチシンポジウム, 2016.3.9, 南山大学(愛知県)
- ⑬ 佐野英樹, 無限次元制御系に対する安定半径の近似について, 数理人口学・数理生物学セミナー, 2016.1.27, 東京大学(東京都)
- ⑭ H. Sano, H-infinity control of a parallel-flow heat exchange process, The 16th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO'2015), 2015.10.8, Garmisch-Partenkirchen (Germany)

[図書] (計 0件)

[その他]

ホームページ等

<http://www2.kobe-u.ac.jp/~sano/>

## 6. 研究組織

### (1) 研究分担者

なし

### (2) 研究協力者

なし